Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København, august 1999

Matematik H 2

Erhvervsøkonomi/matematik

Obligatorisk hjemmeopgave i matematik
27. juli – 10. august 1999

Opgaven består af nedenstående 6 enkeltopgaver. Ved bedømmelsen indgår disse med de anførte omtrentlige pointtal. Alle hjælpemidler er tilladte.

Det gælder for samtlige opgaver, at svarene skal begrundes.

Det er tilladt at samarbejde med andre eksaminander ved denne eksamen om opgavernes løsning. Hver studerende må dog selv udforme sin besvarelse. I tilfælde af samarbejde med andre skal den studerende i sin besvarelse tydeligt anføre, hvem han/hun har samarbejdet med, og ved hvilke af opgaverne. Har der ikke været samarbejde med andre, anføres dette.

Opgavebesvarelsen må ikke overstige 30 sider.

Besvarelsen underskrives af eksaminanden og afleveres i 2 eksemplarer inden den 10. august 1999 kl. 12.

Opgave 1 (Vægt 15%)

1° For hvilke værdier af a er følgende række konvergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi + \sin(2n+\frac{1}{2})\pi}{n^a}.$$

2° For hvilke værdier af b er følgende række konvergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n^b}.$$

Opgave 2 (Vægt 15%)

Find samtlige løsninger til ligningen

$$(z^2+2z+2)(z^3+3)=0,$$

angivet på formen $a+ib$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (Vægt 15%)

Man betragter fælgende delmængde af $\mathbb{R}^3$:

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{z+1} \}.$$

1° Tegn en skitse af M.
2° Er M lukket?
3° Er M kompakt?

Opgave 4 (Vægt 20%)

Der er givet en funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2,\ x_1 x_2^2).$$

1° Begrund, at der findes en omegn W af $(1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$ og en differentiabel funktion G defineret på W med værdier i $\mathbb{R}^2$ således at for $G = (g_1, g_2)$ gælder

$$G(1,1) = (g_1(1,1)\,,\ g_2(1,1)) = (1,1) \text{ og}$$
$$\forall (x_1, x_2) \in W : F \circ G(x_1, x_2) = (x_1, x_2).$$

2° Bestem Jacobimatricerne for F og G i punktet $(1, 1)$.

Lad $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$H(x_1, x_2) = (e^{x_1 + x_2},\ \cos(x_1 - x_2)).$$

3° Begrund, at funktionen $K = H \circ G$ er defineret og differentiabel på W.
4° Bestem Jacobimatricen for K i $(1, 1)$.

Opgave 5 (Vægt 20%)

Der er givet et maksimeringsproblem

maksimer $\quad f(x, y) = \ln(5 - x^2 - xy - 2y^2)$

under bibetingelserne

$$x + 2y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

1° Opskriv den tilhørende Lagrangefunktion og begrund at den er konkav som funktion af (x, y).
2° Løs problemet.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 6 (Vægt 15%)

Der er givet et lineært standard maximeringsproblem (P)

maksimer $x_1 + 2x_2 + 3x_3$

under bibetingelserne

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{gathered}$$

1° Opskriv det tilhørende duale problem (P′).

2° Begrund, at både (P) og (P′) må have optimale løsninger.

3° Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.

4° Løs både (P) og (P′).