MASO-facitliste

Listens numre refererer til samlingen af gamle MASO-eksamensopgaver. De facitter, der står på listen, er næsten *aldrig* tilstrækkeligt svar på opgaven.

1a) Kvotientkriteriet: $a_{n+1}/a_n = (n+1)/10 \to \infty$ for $n \to \infty$.

1b) Kvotientkriteriet: $a_{n+1}/a_n = (n+1)/((2n+1)(2n+2)) = 1/(2n+2) \to 0$.

4(c) $\mathbf{y} = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^{\mathrm{t}}$.

4(e) $\mathbf{x} = (1, 4, 0)^{\mathrm{t}}$.

18a1) Kvotientkriteriet: $a_{n+1}/a_n = \ln(n+1)/(n+1) \to 0$ for $n \to \infty$.

18a2) Sammenligning: $0 \leqslant a_n \leqslant 1/2^n$, og $\sum 1/2^n$ er en konvergent kvotientrække ($q = \frac{1}{2}$).

18a3) Sammenligning: da $\sin x \leqslant x$ for $x \geqslant 0$, og $\ln x \leqslant \sqrt{x}$ for store værdier af x (hvem vinder) gælder $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}\ln(n) \cdot \frac{1}{n} = \ln(n)/n^2 \leqslant 1/n^{3/2}$, og $\sum 1/n^{3/2}$ er konvergent.

19a) $z = -5 \pm 4i$.

19b) $z = \pm 2i$ og $z = \pm(\sqrt{3} \pm i)$.

30c) Alle koefficienter er $\geqslant 0$, så $\mathbf{x}$ er tilladt for (P), når $\mathbf{x} \gg \mathbf{0}$, og $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ er tilladt for (P'). Altså tilfælde 1° i Dualitetssætningen.

30d) For en tilladt løsning $\mathbf{x}$ til (P) er $f(\mathbf{x}) \geqslant g_3(\mathbf{x}) \geqslant 4$, med lighed, når $x_2 = 0$ og $x_1 + x_3 = 4$. For at $\mathbf{x}$ skal være tilladt, kræves $3x_1 \geqslant 4$ og $x_1 \geqslant 1$, altså blot $4/3 \leqslant x_1 \leqslant 4$; fx $\mathbf{x} = (4/3, 0, 8/3)^{\mathrm{t}}$ eller $\mathbf{x} = (4, 0, 0)^{\mathrm{t}}$. Minimumsværdi: 4.

For $\mathbf{x} = (4, 0, 0)$ gælder ulighederne $g_1(\mathbf{x}) > 4$ og $g_2(\mathbf{x}) > 1$ og $x_1 > 0$; for optimal løsning $\mathbf{y}$ til (P') er altså $y_1 = y_2 = 0$ og første bibetingelse er en lighed $y_3 = 1$, dvs $\mathbf{y} = (0, 0, 1)^{\mathrm{t}}$.

36b) $\mathbf{0}$ er tilladt for (P) og $\mathbf{y}$ er tilladt for (P'), når $\mathbf{y} \gg \mathbf{0}$.

36d) Alle koefficienter er $\geqslant 0$, på nær koefficienten -3 til x_2 i $f(\mathbf{x})$. Heraf følger: hvis $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}$ er tilladt, så er også $\mathbf{x}^0 := (x_1, 0, x_3)^{\mathrm{t}}$ tilladt, og $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}^0)$. Evt maksimum antages altså for $x_2 = 0$. Løser tilsvarende problem i 2 variable: $(x_1, x_3) = (1, 1)$. Altså maksimumsløsning $\mathbf{x} = (1, 0, 1)^{\mathrm{t}}$, maksimumsværdi: 3.

Af ulighederne $g_3(\mathbf{x}) < 6$, og $x_1 > 0$ og $x_3 > 0$, fås, for minimal løsning $\mathbf{y}$: $y_3 = 0$ og $3y_1 + y_2 = 2$ og $2y_1 + y_2 = -3$, dvs $\mathbf{y} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^{\mathrm{t}}$.

37i) Sammenlign med $\sum (\frac{1}{2})^n$: For $n \geqslant 2a$ er $0 \leqslant a_n = (a/n)^n \leqslant (\frac{1}{2})^n$, og $\sum (\frac{1}{2})^n$ er konvergent.

37ii) Af $a_1 > 1$ følger $a_1 > \sqrt{a_1} > 1$, og så er $a_1 > \frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1}) > 1$, altså $a_1 > a_2 > 1$. Af $a_2 > 1$ følger nu tilsvarende $a_2 > a_3 > 1$, osv. Altså er $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 1$. Derfor er (a_n) kovergent, og for $a := \lim a_n$ er $a \geqslant 1$. Grænseovergang i ligningen $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n})$ giver $a = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a})$, hvoraf $a = 1$ (idet $a = 0$ er udelukket).

38 $z = 1$ (som dobbeltrod) og $z = \pm(\sqrt{\frac{1}{2}} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}})$.

46 A er ikke, nemlig ubegrænset,

B er, nemlig begrænset og afsluttet,
C er ikke, nemlig ikke afsluttet (henvisning ikke nok, det kræver argument!).

47 1° $\mathbf{x} = (2/5, 1/5)^t$.
2° Da $f(x, y)$ er konkav, og aktiv bibetingelse er konkav og S er konveks.

56(a) $z = -2$ og $z = 1 \pm i$.

56(b) $(z-1)\big((z-2)^2+1\big)\big((z-1)^2+4\big) = 0$. $1+i$ er ikke løsning.

57(a) Antag, at (x_n) er konvergent (grænseværdi $x := \lim x_n$), og at $x_n \in W$ for alle n. For fast k gælder, da $x_n \in W$, at $g_k(x_n) \leqslant g_{k+1}(x_n)$. Ved grænseovergang fås $g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x)$. Da dette gælder for alle k, er $x \in W$.

57(b) Følger umiddelbart af 57(a).

58(b) $M_2 = N_2 \setminus \{(-1,0)\,,\ (1,-4)\}$, dvs lig med N_2 fraregnet de to punkter $(-1,0)$ og $(1,-4)$.

58(c) $\psi'(b) = 1/(3a^2-3)$, når $(a,b) \in M_2$.

59(b) Føringsbetingelsen er opfyldt på nær i $(0,-1)$.

59(e) Maksimum er $\max\{1, a\}$; det antages for $a \leqslant 1$ i punkterne $(\pm 1, 0)$ og for $a \geqslant 1$ i punktet $(0,-1)$. (Specielt, for $a = 1$, er der 3 maksimumspunkter).

63(b) $M = N \setminus \{(0,0), (4, \pm\sqrt{2})\}$.

63(c) $\varphi'(a) = 1/(8b - 4b^3)$.

72(1) den første ulighed, fx fordi $n^2 + n \geqslant n^2$ og $\ln(n^2) \leqslant n$ (det sidste kræver yderligere begrundelse); den anden, fordi $n^2 + n \leqslant n^3$ (begrundelse?) og $\ln(n^2) + n \geqslant n$.

73(1) $1, -1, 1+2i, -1+2i$.

73(2) 5.

74(2) $a \leqslant 0$.

74(3) $a \in \mathbb{R}$.

74(4) $a < 1$.

75(2) $(-1/3)(-1/4)(1/2) + (-1/3)(-1/4)(1/3) = 5/72$.

76(3) $\mathbf{y} = (\frac{3}{2}, 0)^t$, min$= \frac{3}{2}$.

76(4) $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1$.

76(5) $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)^t$, max$= \frac{3}{2}$.

77 Betragt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med $a_n = n^{-a}(k + 1/n)^n$. Her er $\sqrt[n]{a_n} = n^{-a/n}(k + 1/n)$. Første faktor $(n^a)^{1/n} = (n^{1/n})^a \to 1^a = 1$, ifølge [GG, 2.11], og anden faktor $k + 1/n \to 0$. Heraf: $\sqrt[n]{a_n} \to k$. Af [GG, s.29], tilføjelse til rodkriteriet, fås: $k < 1$: konvergens; $k > 1$: divergens. For $k = 1$ er $a_n = n^{-a}(1 + 1/n)^n$. Da $(1 + 1/n)^n \to e$ [GG, s.12], har a_n samme størrelsesorden som n^{-a}. Derfor er $\sum a_n$ konvergent, hvis og kun hvis $\sum n^{-a}$ er konvergent; altså $\sum a_n$ er konvergent, hvis og kun hvis $a > 1$.