MASO-Eksempler

Eksempel 1. Et par talfølger:

(1) $0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots,\quad x_n = 0 \quad\to 0,$

(2) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots,\quad x_n = 1 \quad\to 1,$

(3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots,\quad x_n = (1 + (-1)^n)/2,$

(4) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots,\quad x_n = n(1 + (-1)^n)/4,$

(5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots,\quad x_n = \frac{1}{n} \quad\to 0,$

(6) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots,\quad x_n = 2 - 1/2^{n-1} \quad\to 2,$

(7) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots,\quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad\to \infty,$

(8) $1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots,\quad y_n = x_{n+1}/x_n \quad\to (1+\sqrt{5})/2,$

(9) $2, \frac{3^2}{2^2}, \frac{4^3}{3^3}, \frac{5^4}{4^4}, \frac{6^5}{5^5}, \dots,\quad x_n = (1+\frac{1}{n})^n \quad\to e,$

(10)

$$\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \dots,\quad x_n = \sqrt{1+x_{n-1}} \quad\to (1+\sqrt{5})/2,$$

(11) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots,\quad x_n = \sqrt[n]{n} \quad\to 1,$

(12) $2, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \frac{65}{24}, \frac{326}{120}, \dots,\quad x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad\to e,$

(13) $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \dots,\quad x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad\to \infty,$

(14) $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{47}{60}, \dots,\quad x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \quad\to \ln 2,$

(15) $1, \frac{2}{3}, \frac{13}{15}, \frac{76}{105}, \frac{263}{315}, \dots,\quad x_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{2n-1} \quad\to \frac{\pi}{2}.$

At følgerne konvergerer som anført, er bestemt ikke oplagt.

Eksempel 2. Følgen i eksempel 1(7) er Fibonacci's talfølge, og følgen (y_n) i (8) er defineret ud fra den i (7). Hvis man *antager*, at følgen (y_n) er konvergent, er det ikke så svært at bestemme grænsværdien $y = \lim y_n$: Af $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ fås

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + x_n}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + 1 = \frac{1}{y_n} + 1;$$

og så giver regler for regning med grænseværdi, at $y = 1/y + 1$, eller $y^2 - y - 1 = 0$, hvoraf

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

idet $y = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ er udelukket, da $y_n \geqslant 0$. Grænseværdien kaldes i øvrigt *det gyldne snit*.

Tilsvarende med (10): *Antages*, at følgen konvergerer (mod et tal x), så giver ligningen $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}}$ ved grænseovergang, at $x = \sqrt{1+x}$, hvoraf $x^2 = 1 + x$, hvilket er ligningen for det gyldne snit. Det er i øvrigt ikke så svært at vise, at antagelserne er korrekte.

Eksempel 3. Hvem vinder:

$$\frac{2^n}{n^{500}+3n^2} \to \infty, \quad \frac{\log(n^{500}+300n)}{n} \to 0, \quad \frac{2n^{500}+300}{n^{501}+1}+\frac{2n^{500}+1}{3n^{500}+300} \to 0+\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{3}.$$

Den sidste bruger, for polynomier i tæller og nævner, at „graden bestemmer“.

Eksempel 4. $x_n := \sqrt[n]{2} = 2^{1/n} \to 2^0 = 1$, fordi $1/n \to 0$ og 2^x er kontinuert.

$y_n := \sqrt[n]{n} = n^{1/n} \to 1$, fordi $\log y_n = \log(n^{1/n}) = \frac{1}{n}\log n \to 0$ (hvem vinder!), og så vil $y_n = \exp(\log y_n) \to e^0 = 1$.

Eksempel 5. Fakultet, $n!$, vinder over eksponentialfunktion, a^n, men taber til n^n:

$$\lim a^n/n! = 0, \qquad \lim n!/n^n = 0.$$

Eksempel 6. Rækken $\sum \frac{1}{n}$ er divergent: I afsnitssummen s_n sættes parenteser: omkring første led $\frac{1}{1}$ (det er ret overflødigt), omkring de næste to, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, omkring de næste fire $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, omkring de næste otte osv. Der kan sættes k parenteser, når $n \geqslant 1+2+4+8+\cdots+2^{k-1} = 2^k-1$. For $j = 0, 1, 2, \ldots$ står der i den j'te parentes 2^j brøker, hvoraf den første (og største) er $\frac{1}{2^j}$. Summen af brøkerne i den j'te parentes er derfor mindst lig med $2^j \cdot 1/2^j = 1$. Summen af de k parenteser er derfor mindst $k \cdot 1 = k$. For et givet k har vi altså $s_n \geqslant k$, når $n \geqslant 2^k - 1$. Altså $s_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

Eksempel 7. Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ er konvergent: Sammenlign med kvotientrække, fx med $\sum (1/2)^n$, som vides at være konvergent. For $n \gg 0$ er $1/n! \leqslant 1/2^n$ (hvem vinder?), og det er nok. Faktisk er $1/n! \leqslant 1/2^{n-1}$ for *alle* $n \geqslant 1$, og derfor er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + \cdots = 2.$$

Lægges 1 til på begge sider fås, at $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! \leqslant 3$. Faktisk er $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = e$.

Eksempel 8. Kig på rækkerne (men henblik på konvergens/divergens):

$$(1) \sum \frac{n^2+n+1}{4n^2-1}, \qquad (2) \sum \frac{n^2+n+1}{4n^3-1}, \qquad (3) \sum \frac{n^2+n+1}{4n^4-1},$$

$$(4) \sum \frac{n^{2n}+n^n+1}{4n^{3n}-1}, \qquad (5) \sum \frac{(n+1)^2}{n!}, \qquad (6) \sum \frac{(n+1)!}{2^{n^2}}.$$

(1) er divergent, da $a_n \to \frac{1}{4}$; betingelsen $a_n \to 0$ er altså *ikke* er opfyldt. I (2) er tælleren i a_n, altså n^2+n+1, af samme størrelsesorden som n^2; derfor er brøken a_n af samme størrelsesorden som brøken $b_n := n^2/(4n^2-1)$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^2+n+1)/(4n^3-1)}{n^2/(4n^3-1)} = \frac{n^2+n+1}{n^2} \to 1.$$

Derfor er rækkerne $\sum a_n$ og $\sum b_n$ samtidig konvergente. Med andre ord: i a_n kan n^2+n+1 i tælleren erstattes af n^2, når man undersøger konvergens. Tilsvarende kan nævneren $4n^3-1$ erstattes af n^3. Når det er gjort, er a_n erstattet af $n^2/n^3 = 1/n$; Da $\sum 1/n$ er divergent, er (2) divergent.

Tilsvarende er (3) konvergent: a_n i (3) har samme størrelsesorden som $n^2/n^4 = 1/n^2$, og $\sum 1/n^2$ er konvergent.

I (4) er a_n af samme størrelsesorden som $b_n := n^{2n}/n^{3n} = 1/n^n$; da $\lim \sqrt[n]{b_n} = \lim 1/n = 0$, er $\sum b_n$, og dermed også (4), konvergent.

Rækken (5) er konvergent, idet

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2 \cdot n!}{(n+1)^2 \cdot (n+1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$$

og (6) er konvergent, idet

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = (n+2)2^{n^2-(n+1)^2} = (n+2)/2^{2n+1} \to 0.$$

Eksempel 9. Regning med potensrækker. For $|x| < 1$ er:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = (1-x)^{-1}, \qquad 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = (1-x^2)^{-1},$$
$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) = x/(1-x^2).$$

For eksempel er $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots = \frac{1}{2}/(1-\frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$.

Eksempel 10. Et par Taylorrækker, den første for $|x| < 1$, de øvrige for alle x:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Eksempel 11. Regning med komplekse tal:

$$(-3-4i) + (-1+2i) = (-3-1) + (-4+2)i = -4-2i,$$
$$\begin{aligned}(-3-4i)(-1+2i) &= (-3)(-1) + (-3)\cdot 2i + (-4)(-1)i + (-4)\cdot 2i^2 \\ &= 3 + (-6+4)i - 8i^2 = 11 - 2i,\end{aligned}$$
$$(-1+2i)^2 = -3-4i, \quad (-1+2i)^3 = (-3-4i)(-1+2i) = 11-2i,$$
$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = (1-6+1) + (4-4)i = -4;$$

i den sidste regning indgår binomialformlen $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ og udregningen af potenserne af i:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots.$$

Eksempel 12. Nogle komplekse størrelser:

z	$\operatorname{Re} z$	$\operatorname{Im} z$	$\|z\|$	$\arg z$	$\overline{z}$	$1/z$
1	1	0	1	$0, 2\pi, \dots$	1	1
-1	-1	0	1	$-\pi, \pi, 3\pi, \dots$	-1	-1
i	0	1	1	$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$	$-i$	$-i$
$1+i$	1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4}, \dots$	$1-i$	$\frac{1}{2}(1-i)$
$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{2\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}, \dots$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$3+4i$	3	4	5	$\operatorname{Arctan}(\frac{4}{3})$	$3-4i$	$\frac{1}{25}(3-4i)$
$11-2i$	11	-2	$5\sqrt{5}$	$\operatorname{Arctan}(\frac{-2}{11})$	$11+2i$	$\frac{1}{125}(11+2i)$

$\operatorname{Arctan}(t) = \tan^{-1} t$ er længden af den bue (vinkel) θ, med $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, som opfylder, at $\tan\theta = t$.

Eksempel 13. Nogle kvadratrødder:

$$\sqrt{1} = \pm 1, \quad \sqrt{-1} = \pm i, \quad \sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2},$$

$$\sqrt{1+i} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

$$\sqrt{-3+4i} = \sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}+3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}} = 1+2i;$$

de to sidste resultater kan også multipliceres med -1.

En kubikrod af 1 (en *tredie enhedsrod*) er en af de tre løsninger til ligningen $z^3 = 1$, altså ud over 1 også

$$\pm(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \pm(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

For kvadratroden fås:

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}} = \pm(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}) = \pm(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}).$$

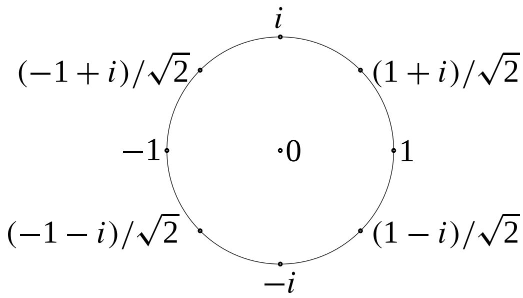
En kubikrod af $11-2i$, altså en løsning til $z^3 = 11-2i$, bestemmes ved et (heldigt) gæt: $|11-2i| = \sqrt{125} = (\sqrt{5})^3$, så $|z| = \sqrt{5}$. Hvis $z = x+iy$, er altså $x^2+y^2 = 5$. Hvis x, y her skulle være hele tal (det er det, der er det heldige gæt!), måtte vi have $(x, y) = (\pm 1, \pm 2)$ eller $(\pm 2, \pm 1)$. En let udregning giver, at $(-1+2i)^3 = 11-2i$. Altså er $z = -1+2i$ en løsning. De to andre løsninger fås ved at multiplicere z med en tredie enhedsrod.

Eksempel 14. Der er tre rødder i polynomiet $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$,

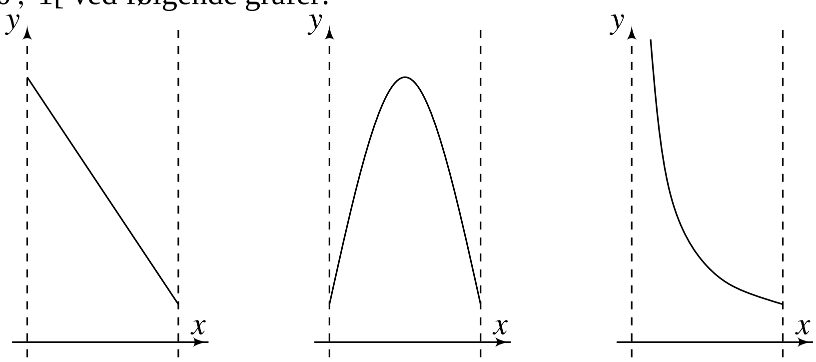
$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3).$$

Som bekendt gælder nemlig (kendt fra gymnasiet): *Hvis $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ har heltalskoefficienter (dvs $a_i \in \mathbb{Z}$) og en uforkortelig brøk a/s er rod i $p(z)$, så er $a \mid a_0$ og $s \mid a_n$.* For polynomiet her er $n = 3$ og $a_n = 1$. Resultatet siger derfor: Hvis a/s er rod i $p(z)$, så er $s = 1$ (dvs a/s er et helt tal) og $a \mid 6$. Rationale rødder i $p(z)$ findes altså blandt de hele tal a, der går op i 6, dvs $a = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. En simpel udregning viser, at $w = 1$ og $w = 2$ er rødder. Og så kan den sidste rod, $w = 3$, fx findes ved at udnytte, at $w_1 w_2 w_3 = -a_3 = 6$.

Eksempel 15. Der er 8 rødder i ligningen $z^8 = 1$, thi $z^8 = 1$ betyder, at $|z|^8 = 1$, dvs $|z| = 1$, og $8\arg(z) = \arg(1)$, dvs $arg(z) = 0, 2\pi/8, 4\pi/8, 6\pi/8, \ldots$:



Eksempel 16. Betragt de tre funktioner f_0, f_1, f_2, definerede på det åbne (begrænsede) interval $]0\,,\ 1[$ ved følgende grafer:



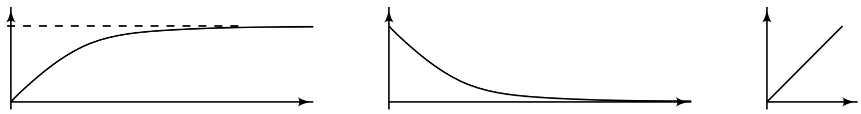
Det er funktionerne $f = -x + 2$, $g = 4x(1-x) + 1$ og $h = 1/x$ (lidt fortegnede).

Billedmængden for f er det åbne interval $]1\,,\ 2[$, og supremum (over $x \in S$) er $\sup f(x) = 2$. Men 2 er ikke en funktionsværdi, så f kan ikke maksimeres.

Billedmængden for g er intervallet $]1\,,\ 2]$, og igen er $\sup g(x) = 2$. Her er 2 en funktionsværdi, nemlig $g(\frac{1}{2}) = 2$. Altså maksimeres $g(x)$ i maksimumpunktet $x = \frac{1}{2}$.

Billedmængden for h er intervallet $[1\,,\ \infty[$, så der er vilkårligt store funktionsværdier. Her er $\sup h(x) = +\infty$, og h kan ikke maksimeres.

Eksempel 17. Tilsvarende med funktioner definerede på det afsluttede (ubegrænsede) interval $S := [0\,,\ \infty[$, fx $f(x) = 1 - e^{-x}$, $g(x) = e^{-x}$ og $h(x) = x$.

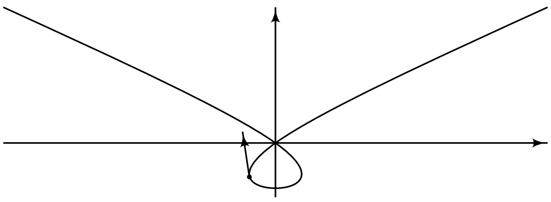


Her er $f(S) = [0\,,\ 1[$, og $g(S) =]0\,,\ 1]$ ($x = 0$ er maksimumspunktet), og $h(S) = [0\,,\ \infty[$.

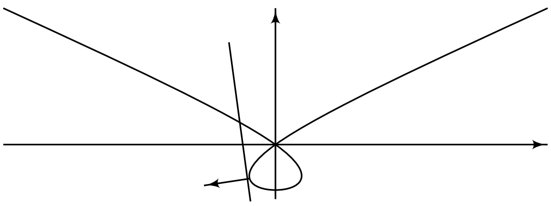
Eksempel 18. En plan kurve (vektorfunktion med 2 koordinater, i én variabel):

$$x = t^3 - t, \qquad x' = 3t^2 - 1, \qquad \text{eller } \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$
$$y = t^2 - 1, \qquad y' = 2t,$$

Til $t = \frac{1}{2}$ svarer punktet på kurven: $(x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2})) = (-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$. Tangentvektoren i dette punkt er $(x'(\frac{1}{2}), y'(\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{4}, 1)$.



Eksempel 19. En plan kurve: niveaukurven $f = 0$ for funktionen $f = x^2 - y^3 - y^2$. Gradienten er $f' = (2x, -3y^2 - 2y)$. Det er samme kurve som den i det foregående eksempel. I punktet $(x, y) = (-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$ er gradienten lig med $f' = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{16})$, vinkelret på tangenten.



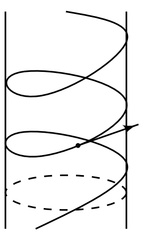
Punktet (x, y) ligger på tangenten til kurvepunktet $(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$, hvis og kun hvis

$$\begin{pmatrix} x - (-3/8) \\ y - (-3/4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ -3/16 \end{pmatrix} = 0.$$

Multiplikation med $8 \cdot 16/3$ giver tangentens ligning: $8x + 32y + 27 = 0$.

Eksempel 20. En rumkurve (vektorfunktion med 3 koordinater, i én variabel):

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix},$$



Eksempel 21. En reel funktion af 3 variable: $f = e^{2x-y}\ln(1+z^2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2x-y}\cdot 2\cdot\ln(1+z^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{2x-y}\ln(1+z^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{2x-y}\frac{2z}{1+z^2}\,.$$

Eksempel 22. En flade i rummet: niveaufladen $f = 1$ for $f = x^2+y^2+7z^2$ (en ellipsoide). Gradienten er $f' = (\nabla f)^{\mathrm{t}} = (2x, 2y, 14z)$. Punktet $(\frac13, \frac13, \frac13)$ ligger på fladen, og her er $f' = (\frac23, \frac23, \frac{14}{3})$. Punktet (x, y, z) ligger på tangentplanen, hvis og kun hvis $(x, y, z) - (\frac13, \frac13, \frac13)$ er vinkelret på gradienten, altså hvis og kun hvis

$$\begin{pmatrix} x-1/3 \\ y-1/3 \\ z-1/3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = 0,$$

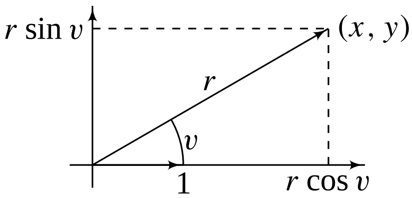
dvs hvis og kun hvis $\frac23 x + \frac23 y + \frac{14}{3}z = \frac23\cdot\frac13 + \frac23\cdot\frac13 + \frac{14}{3}\cdot\frac13 = \frac43 = 2$. Multiplikation med $\frac32$ giver følgende ligning for tangentplanen:

$$x + y + 7z = 3.$$

Eksempel 23. En vektorafbildning (transformation) i to varible:

$$\begin{aligned} x &= r\cos v, \\ y &= r\sin v; \end{aligned} \qquad \mathbf{f}(r, v) = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix}.$$

De to ligninger definerer en vektorafbildning $\mathbf{f}\colon S \to \mathbb{R}^2$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^2$ fx kan være mængden af punkter (r, v), hvor $r > 0$. For givne r, v er billedvektoren (x, y) bestemt ved at dens norm er r og dens argument (vinklen fra x-aksen til vektoren) er v:



Jacobi-matricen er

$$\mathbf{f}' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix},$$

med determinanten $r\cos^2 v + r\sin^2 v = r$. Specielt er determinanten forskellig fra 0, så Jakobi-matricen har en invers.

Et punkt P i planen er bestemt ved sit koordinatsæt (x, y) (de *retvinklede koordinater*), men det kan også bestemmes ved (r, v) (de *polære koordinater*). En funktion $u = u(P)$, der til punkter P i planen knytter reelle tal, kan derfor opfattes som en funktion af 2 variable $u = h(x, y)$, men den kan lige så godt fastlægges som en funktion $u = k(r, v)$. De to funktioner, u som funktion af x, y og u som funktion af r, v beskriver i en vis forstand den samme funktion, nemlig u som funktion af punktet P. Det er i det lys man må se kædereglen:

$$(\partial u/\partial r\ ,\ \partial u/\partial v) = (\partial u/\partial x\ ,\ \partial u/\partial y)\begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}.$$

Eksempel 24. Ligningen $\tan y = x$ er opfyldt for $(x, y) = (0, 0)$. Bestemmer ligningen y som funktion af x nær $(0, 0)$? Med $f := \tan y - x$ er $f_x = -1$ og $f_y = (\tan y)' = 1 + \tan^2 y$. Da $f'_y \neq 0$, er svaret „ja“. Differentialkvotienten $y' = dy/dx$ bestemmes af ligningen $0 = f'_x + f'_y \cdot y'$, altså

$$(*) \qquad y' = -(f'_y)^{-1} f'_x = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Funktion $y = y(x)$ er defineret i et lille interval omkring 0. Faktisk gælder for hvert reelt tal x, at ligningen $\tan y = x$ har en og kun én løsning y med $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Ligningen og betingelsen på y:

$$x = \tan y, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

bestemmer altså y som en funktion $y = y(x)$ defineret for alle $x \in \mathbb{R}$. Den betegnes $y = \mathrm{Arctan}(x)$ eller (på en lommeregner) $y = \tan^{-1} x$. Den opfylder ligningen (*).

Eksempel 25. Bestemmer ligningen, cfr. [S, s. 90],

$$x^2 e^y - 2y + x = 0,$$

y som funktion af x nær $(x_0, y_0) = (-1, 0)$? Idet $f(x, y)$ er ligningens venstreside, er

$$f'_x = 2xe^y + 1, \qquad f'_y = x^2 e^y - 2.$$

Specielt, i punktet $(-1, 0)$ er $f'_y = -1 \neq 0$. Derfor er svaret: ja! For denne funktion, $y = \varphi(x)$, er $\varphi(x_0) = y_0$, altså $\varphi(-1) = 0$. Differentialkvotienten bestemmes af ligningen $f'_x + f'_y y' = 0$, altså

$$(**) \qquad (2xe^y + 1) + (x^2 e^y - 2)y' = 0.$$

Indsættelse af $(x, y) = (-1, 0)$ giver $0 = (-1) + (-1)y'$, hvoraf $y' = -1$; altså: $\varphi'(-1) = -1$.

Samme spørgsmål med $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Her er $f'_y = -2 \neq 0$, så svaret er igen: ja! For denne funktion, $y = \psi(x)$, er $\psi(0) = 0$, og $0 = 1 + (-2)y'$, hvoraf $y' = 1/2$; altså: $\psi'(0) = 1/2$.

Bemærk, at sætningen om implicit givet funktion kun giver, at den første funktion φ er defineret i et interval omkrint $x = -1$, og tilsvarende, at den anden funktion ψ er defineret i et interval omkring $x = 0$. Sætningen giver ikke, at de to funktioner er den samme funktion, defineret i et interval, der indeholder både -1 og 0. [Men det er de, i dette tilfælde.]

Højere afledede fås ved at differentiere (**) med hensyn til x, idet man tænker sig y indsat som funktion af x. Fx skal e^y differentieres som en sammensat funktion: differentialkvotienten mht til x er $e^y y'$. Differentiationen giver:

$$(***) \qquad (2e^y + 2xe^y y') + (2xe^y + x^2 e^y y')y' + (x^2 e^y - 2)y'' = 0.$$

I $(-1, 0)$ var $y' = -1$, så ligningen giver $(2 - 2\cdot(-1)) + (-2 + 1\cdot 1\cdot(-1))(-1) + (1 - 2)y'' = 0$, hvoraf $7 - y'' = 0$, dvs $y'' = 7$. Altså er $\varphi''(-1) = 7$.

I $(0, 0)$ var $y' = 1/2$, så ligningen giver $2 + 0 + (-2)y'' = 0$, hvoraf $y'' = 1$. Altså er $\psi''(0) = 1$.

Eksempel 26. Bestemmer ligningen,

$$x^2e^y - 2y + z = 0,$$

y som funktion af (x, z) nær $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, -1)$? Idet $f(x, y, z)$ er ligningens venstreside, er

$$f'_x = 2xe^y, \quad f'_y = x^2e^y - 2, \quad f'_z = 1.$$

Specielt, i punktet $(-1, 0, -1)$ er $f'_y = -1 \neq 0$. Derfor er svaret: ja! Idet $y = \varphi(x, z)$ er denne funktion, defineret nær $(x, z) = (-1, -1)$ og med værdien $\varphi(-1, -1) = 0$, bestemmes de afledede $y' = (\partial y/\partial x, \partial y/\partial z)$ af $f'_{x,z} + f'_y \cdot y' = 0$, altså

(**) $$(2xe^y\ ,\ 1) + (x^2e^y - 2)(\partial y/\partial x\ ,\ \partial y/\partial z).$$

Indsættelse af $(x, y, z) = (-1, 0, -1)$ giver $(-2, 1) + (-1)(\partial y/\partial x, \partial y/\partial z) = (0, 0)$, hvoraf $\partial y/\partial x = 2$ og $\partial y/\partial z = -1$. Altså: $\varphi'_x(-1, -1) = 2$ og $\varphi'_z(-1, -1) = -1$.

Samme spørgsmål med $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$: Her er $f'_y = -2$, så: ja! Idet $y = \psi(x, z)$ er denne funktion, defineret for (x, z) nær $(0, 0)$ og med værdien $\psi(0, 0) = 0$ bestemmes $y' = \psi'$ af $(**)$, med $(0, 0, 0)$ indsat: $(0, 1) + (-2)(\partial y/\partial x, \partial y/\partial z) = (0, 0)$. Altså $\psi'_x(0, 0) = 0$ og $\psi'_z(0, 0) = 1/2$.

Bestemmer ligningen z som funktion af (x, y)?

Eksempel 27. Den inverse til en 2×2 matrix er god at kende som en formel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

eller med ord: „byt om på tallene i diagonalen, skift fortegn på dem uden for, og divider med determinanten“.

Eksempel 28. Bestemmer ligningerne

$$x^3 - y^2 = 0,$$
$$x^2 - ty = 0,$$

x og y som funktioner af t, altså $x = x(t)$, $y = y(t)$, nær $(t_0, x_0, y_0) = (2, 4, 8)$?

Det er tilfældet $n = 1, m = 2$: Søjlen $\mathbf{f}$ består her af de to funktioner f, g på venstresiden, $\mathbf{x}$'erne er den ene variabel t og $\mathbf{y}$'erne er (x, y). Bogens $\mathbf{f}'_\mathbf{x}$ og $\mathbf{f}'_\mathbf{y}$ er her $\mathbf{f}'_t$ og $\mathbf{f}'_{x,y}$:

$$\mathbf{f}'_t = \frac{\partial(f, g)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'_{x,y} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & -t \end{pmatrix}.$$

Determinanten af matricen er:

$$|\mathbf{f}'_{x,y}| = \left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & -t \end{vmatrix} = -3x^2t + 4xy.$$

I det givne punkt er værdien $= -3\cdot 4^2\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot 8 = 1\cdot 4\cdot 8 = 32 \neq 0$. Derfor er svaret ja!

Af $x(t_0) = x_0$ og $y(t_0) = y_0$ får vi $x(2) = 4$, $y(2) = 8$. De afledede funktioner x' og y' bestemmes af formlen,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'_t + \mathbf{f}'_{x,y}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

dvs

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & -t \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}.$$

For $t = t_0 = 2$ er altså

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 48 & -16 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1/16 & 1/2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix},$$

dvs $x'(2) = 4$, $y'(2) = 12$.

I dette tilfælde er det nu ikke så svært at bestemme x, y eksplicit ud fra ligningerne: Når $x \neq 0$, finder man let $x = t^2$, $y = t^3$.

Eksempel 29. Bestemmer ligningerne,

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$\sin 2t - 2xy = 0,$$

x, y som funktioner af t nær ved $(x, y, t) = (1, 0, 0)$? Idet $\mathbf{f}$ er vektorafbildningen givet ved venstresiden, fås:

$$|\mathbf{f}'_{x,y}| = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = 4(y^2 - x^2).$$

Determinanten, efter indsættelse af $(x, y, t) = (1, 0, 0)$, er altså $-4 \neq 0$, så svaret er ja. Jakobimatricen for x, y som funktioner af t bestemmes af:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -(\mathbf{f}'_{x,y})^{-1}\mathbf{f}'_t = -\frac{1}{4(y^2 - x^2)}\begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} = \frac{\cos 2t}{x^2 - y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

For $t = 0$ er $x(0) = 1$ og $y(0) = 0$, og altså $x'(0) = 0$ og $y'(0) = 1$. Det er heller ikke så svært at løse ligningerne explicit.

Eksempel 30. Vektorafbildningen $\mathbf{f}\colon S \to \mathbb{R}^2$,

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v; \qquad \mathbf{f}(r, v) = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix},$$

defineret på delmængden $S \subseteq \mathbb{R}^2$, hvor $r > 0$, er betragtet tidligere. Findes den inverse afbildning, eventuelt lokalt? Det er spørgsmålet, om man, for et givet (x, y), ud fra de to ligninger, kan bestemme (r, v) entydigt. Det er let nok med r: Af ligningerne følger

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 v + r^2\sin^2 v = r^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = r^2.$$

For $(x, y) = (0, 0)$ får vi $r = 0$, som ikke er brugbar, da vi søger et $r > 0$. Antag, at $(x, y) \neq (0, 0)$. Da følger det, at

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tallet r er altså normen af vektoren (x, y). Det er også klart fra ligningerne, at v er en vinkel fra vektoren $(1, 0)$ til vektoren (x, y).

Men så er der et lille problem: hvis v er en sådan vinkel, så er alle tallene $\dots, v-2\pi, v, v+2\pi, v+4\pi, \dots$ også vinkler. Vinklen v er altså ikke entydigt bestemt ved (x, y). Men lokalt kan vinklen fastlægges: Antag, at det er givet, at $(x_0, y_0) = (r_0\cos v_0, r_0\sin v_0)$, og specielt at v_0 er en bestemt af vinklerne til (x_0, y_0). Så kan en vinkel til en vektor (x, y) tæt ved (x_0, v_0) fastlægges som den, der ligger tættest ved v_0. Altså har afbildningen lokalt en invers afbildning.

For at anvende sætningen om invers afbildning betragtes Jacobi-matricen,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix},$$

med determinant $r\cos^2 v + r\sin^2 v = r$. Den er forskellig fra 0, da vi betragter punkter $(r, v) \in S$, hvor $r > 0$. Altså findes den inverse, lokalt, og Jacobi-matricen til den inverse er den inverse Jakobi-matrix:

$$\frac{\partial(r, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r\sin v \\ \sin v & r\cos v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos v & r\sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

På højresiden kan vi bruge vores viden: $r\cos v = x$ og $r\sin v = y$, og derfor er $\cos v = x/r$ og $\sin v = y/r$. Videre er $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så indsættelse giver:

$$\frac{\partial(r, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\begin{pmatrix} x & y \\ -y/\sqrt{x^2 + y^2} & x/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y/(x^2 + y^2) & x/(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Øverste række er $(\partial r/\partial x, \partial r/\partial y)$; den er ingen overraskelse, da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nederste række er tilsvarende de partielle afledede af v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

og det er mere overraskende: Vi har ikke et explicit „udtryk“, der giver vinklen v som funktion af (x, y) for alle punkter (og sådan et udtryk findes faktisk ikke); alligevel har vi fundet udtryk for de partielle afledede $\partial v/\partial x$ og $\partial v/\partial y$.

Eksempel 31. Normen er en konveks funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, thi når $0 < \lambda < 1$, så er

$$|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}| \leqslant |\lambda\mathbf{x}| + |(1-\lambda)\mathbf{y}| = \lambda|\mathbf{x}| + (1-\lambda)|\mathbf{y}|;$$

for det sidste lighedstegn er det benyttet, at λ og $1-\lambda$ er positive skalarer.

Man kan også differentiere $r = |\mathbf{x}|$, fx for $n = 2$, hvor $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Man finder $\partial r/\partial x = 1/(2\sqrt{x^2+y^2}) \cdot 2x = x/r$, og analogt for y:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\,,$$

og heraf videre,

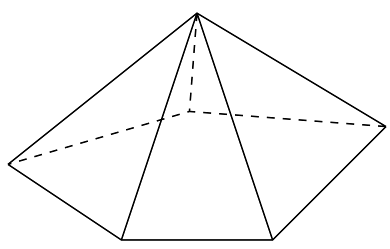
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1\cdot r - x(x/r)}{r^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}\,,$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}\right) = x(-1)r^{-2}(y/r) = \frac{-xy}{r^3}\,.$$

og analogt for $\partial^2 r/\partial y^2$. Hesse-matricen bliver herefter:

$$r'' = \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

Det ser jo positiv semidefinit ud: i diagonalen står kvadrater, $\geqslant 0$, og determinanten af matricen er 0. *Men pas på:* Udregningen gælder kun for $r \neq 0$, dvs $(x, y) \neq (0, 0)$, og den delmængde af $\mathbb{R}^2$, der bliver tilbage, når man fjerner $(0, 0)$, er *ikke* konveks. Udregningen fortæller således ikke (umiddelbart), at r er en konveks funktion.

Eksempel 32. I dimension $n \geqslant 3$ kan man godt have flere end n bibetingelser aktive i et hjørne, uden at S er særlig patologisk. Fx, i dimension 3, en pyramide, hvis grundflade er en 5-kant.



I toppunktet er 5 bibetingelser aktive, svarende til de 5 sideflader, der går gennem punktet.

Eksempel 33. Maksimer x^2y for $xy \geqslant 4$ og $x + y \leqslant 5$. Lagrangefunktionen er $L = x^2y - \lambda_1(4 - xy) - \lambda_2(x + y - 5)$. Ligningen (a) $\nabla L = \mathbf{0}$ giver:

$$\text{(a1)} \qquad \partial L/\partial x = 2xy + \lambda_1 y - \lambda_2 = 0,$$
$$\text{(a2)} \qquad \partial L/\partial y = x^2 + \lambda_1 x - \lambda_2 = 0.$$

Betingelsen (b) efterprøves i de fire tilfælde: Ø, 1, 2, 12 (hvor de aktive bibetingelser er markeret).
•Ø: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. (a2) giver $x = 0$, i modstrid med $xy \geqslant 4$.
•1: $g_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, altså $xy = 4$. (a1), (a2) giver let, at $x = 0$ og $y = 0$, en modstrid.
•2: $\lambda_1 = 0$, $g_2 = 0$, altså $x + y = 5$. (a1),(a2) giver, at $2xy = x^2$, hvoraf $x = 2y$, $5 = x + y = 3y$, $y = 5/3$, $x = 10/3$. En kandidat: $(10/3, 5/3)$.
•12: $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, altså $x+y = 5$ og $xy = 4$. Det giver $(x, y) = (4, 1)$ og $(x, y) = (1, 4)$, og (a1), (a2) giver i det første tilfælde, at $8 + 4\lambda_1 = 1 + \lambda_1$, hvoraf $3\lambda_1 = -7$ i modstrid med at $\lambda_1 \geqslant 0$. Tilbage en kandidat: $(4, 1)$

Bedste kandidat: $(10/3, 5/3)$. Og det er et maksimumspunkt!

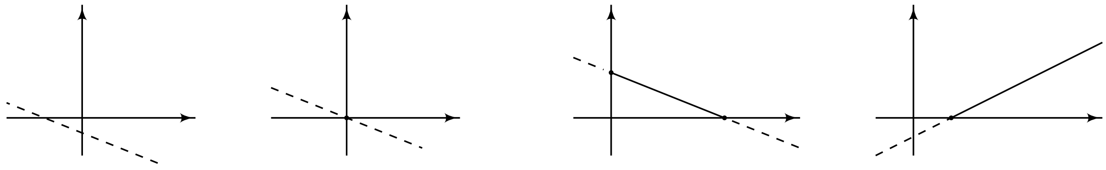
Eksempel 34. Maksimer x^2y for $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 5$. Lagrangefunktionen $L = x^2y + \lambda_1 y + \lambda_2 x - \lambda_3(x^2 + y^2 - 5)$, og $\nabla L = 0$ giver

$$\begin{cases} \text{(a1)} & 2xy + \lambda_2 - 2\lambda_3 x = 0, \\ \text{(a2)} & x^2 + \lambda_1 - 2\lambda_3 y = 0. \end{cases}$$

•Ø: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Det giver $x = 0$, modstrid, da g_2 så er aktiv.
•1: $g_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, altså $y = 0$. Dit giver $x^2 + \lambda_1 = 0$, og da $\lambda_1 \geqslant 0$ fås videre $x = 0$, modstrid, da g_2 så er aktiv.
•2: $\lambda_1 = g_2 = \lambda_3 = 0$, altså $x = 0$. Opfyldt for $(0, y)$ (med $\lambda_3 = 0$). Mange kandidater, med samme funktionsværdi $f(0, y) = 0$.
•3: $\lambda_1 = \lambda_2 = g_3 = 0$, altså $x^2 + y^2 = 3$. Af (a1) (og $x \neq 0$) fås $y = \lambda_3$, og så giver (a2), at $x^2 - 2y^2 = 0$. Da $x^2 + y^2 = 3$ fås $(x, y) = (\sqrt{2}, 1)$, med værdi $f(\sqrt{2}, 1) = 2$.
•12, •13, •23: Det er hjørnerne; vi bekymrer os ikke om Kuhn-Tucker's betingelser, men noterer funktionsværdierne: $f(0, 0) = 0$, $f(\sqrt{3}, 0) = 0$, $f(0, \sqrt{3}) = 0$.
•123: Intet punkt kan opfylde alle tre bibetingelser.

Største værdi i maksimumspunktet $(\sqrt{2}, 1)$.

Eksempel 35. Tilladte løsninger til et KP i planen (n=2) med m=1 bibetingelse:



Mængden S af tilladte løsninger er, i de 4 eksempler: tom, et punkt, et liniestykke, og en halvlinie.

Eksempel 36. Et KP (kanonisk program), i n=5 variable $u, v, w, x, y,$ med m=3 bibetingelser, før og efter omformning til reduceret trappeform (echelonform):

$$\begin{array}{rrrrrl} u & & +w & -\ x & & =2, \\ u & -v & & & +\ y & =1, \\ u & & & +\ x & -\ y & =1, \\ & & & 2x & -3y & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrl} u & & & +\ x & -\ y & =1, \\ & v & & +\ x & -2y & =0, \\ & & w & -2x & +\ y & =1, \\ & & & 2x & -3y & \end{array}$$

(I et KP er alle bibetingelser er ligninger, og alle variable er $\geqslant 0$.) Der søges maksimum af objekfunktionen i nederste række. På matrixform:

(P)

$$(\max),\ \text{KP},\quad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \end{array}$$

Tilladte basisløsninger: Af 3-sæt af de 5 søjler er der $\binom{5}{3}$=10. Fx:

$$345 \text{ giver } (w, x, y) = (4, 2, 1), \qquad \text{eller kort: } \bullet 345\text{: } (4, 2, 1),$$

der betyder, at søjlerne med numrene 3,4,5, altså $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ giver en tilladt basisløsning: Vi har $4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}$. Løsningen er fundet ved at løse ligningssystemet,

$$\begin{array}{rrrl} & x & -\ y & =1, \\ & x & -2y & =0, \\ w & -2x & +\ y & =1. \end{array}$$

Prøves alle 3-sættene bliver resultatet:

•123: (1, 0, 1) ;	•124: – ;	•125: (2, 2, 1) ;	•134: (1, 1, 0) ;	•135: (1, 1, 0) ;
•145: – ;	•234: – ;	•235: – ;	•245: – ;	•345: (4, 2, 1) ;

et '–' markerer, at mindst én koordinat er negativ (og dermed ikke tilladt). Der er 5 valg, der giver en tilladt basisløsning, men 123, 134, og 135 giver naturligvis den samme, svarende til at $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$. I alt findes 3 tilladte basisløsninger:

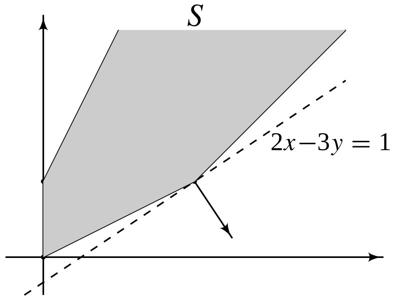
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Objektfunktionen, $2x - 3y$, har i de tre tilladte basisløsninger værdierne 0, -3, og $+1$. Den sidste basisløsning er altså kandidat til en maksimal løsning.

Eksempel 37. Et standardprogram (SP) i n=2 variable, med m=3 bibetingelser:

$$\begin{array}{rl} x - \ y & \leqslant 1, \\ x - 2y & \leqslant 0, \\ -2x + \ y & \leqslant 1, \\ 2x - 3y & \end{array} \qquad (P) \qquad (\max),\ \text{SP},\ \leqslant, \quad \begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -3 & \end{array}$$

Omformningen af (P) til et KP fører til programmet i et foregående eksempel. Men det er lettere at behandle standardprogrammet:



Mængden S af tilladte løsninger er her en (ubegrænset) polygon, med hjørner i $(0, 1)$, $(0, 0)$, og $(2, 1)$, og $2x - 3y$ giver den største værdi, $= 1$, i det tredie hjørne. Niveaulinien gennem dette punkt er linien med ligningen $2x - 3y = 1$. Da S ligger over denne linie og gradienten peger væk fra S, er punktet et maksimumspunkt.

Eksempel 38. Det duale program til (P) fra den foregående opgave:

$$(P') \qquad (\min), \text{SP},\ \geqslant, \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x + \ y - 2z & \geqslant \ 2, \\ -x - 2y + \ z & \geqslant -3, \\ x + z, & \end{array}$$

hvor der søges minimum af objektfunktionen $x + z$. Først omformes (P') til et KP ved at tilføje restvariable u, v:

$$(Q) \qquad (\min), \text{KP}, \quad \begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

Basisløsninger: alle 2-sæt ud af 5 søjler afprøves:

•12: $-$;	•13: $(1, 3)$;	•14: $-$;	•15: $-$;	•23: $(1, 2)$;
•24: $-$;	•25: $-$;	•34: $(1, 1)$;	•35: $(4, 1)$;	•45: $-$;

altså 4 tilladte basisløsninger til (Q):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor objektfunktionen $x + z$ har værdierne 3, 2, 1, 5. Minimumskandidaten for (Q) er altså den 3. basisløsning, med værdien 1. For programmet (P') er minimumskandidaten derfor $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Det er let at se her, at minimumskandidaten faktisk er en minimal løsning til (P'): Enten fordi objektfunktionen $x + z$, på mængden S' af tilladte løsninger, er nedad begrænset (den er altid $\geqslant 0$), eller fordi S' er begrænset (bibetingelse (1)+(2) giver $y + z \leqslant 1$, og (1)+2·(2) giver $x + 3y \leqslant 4$).

Eksempel 39. Den tilstrækkelige betingelse: Med $\mathbf{y}^{\mathrm{t}} = (1, 1, 0)$ som minimumskandidat for (P') fås, for et eventuelt maksimumspunkt $\mathbf{x}^{\mathrm{t}} = (x, y)$ for (P), følgende ligninger: Da de to første koordinater i $\mathbf{y}$ er > 0, er de to første bibetingelser for $\mathbf{x}$ ligheder, dvs $x - y = 1$ og $x - 2y = 0$. De to ligninger er jo nemme at løse: $\mathbf{x}^{\mathrm{t}} = (x, y) = (2, 1)$ og det er en tilladt løsning til (P). *Derfor* er kandidaten $\mathbf{y}$ en minimal løsning til (P') og $\mathbf{x}$ er en maksimal løsning til (P).

Omvendt, ud fra $\mathbf{x}^{\mathrm{t}} = (2, 1)$ som maksimumskandidat for (P) fås, for et eventuelt minimumspunkt $\mathbf{y}^{\mathrm{t}} = (x, y, z)$ til (P'): Begge koordinater for $\mathbf{x}$ er > 0, så begge bibetingelser for $\mathbf{y}$ skal være ligheder; desuden, da den 3. bibetingelse for $\mathbf{x}$ gælder med skarp ulighed, er tredie-koordinaten i (x, y, z) lig med 0. Nu er det nemt at løse: $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Det er en tilladt løsning til (P'). *Derfor* er kandidaten $\mathbf{x}$ en maksimal løsning til (P) og $\mathbf{y}$ er en minimal løsning til (P').

Eksempel 40. Nogle ret trivielle standardprogrammer, $m{=}n{=}2$:

$$(P) \quad (\max),\ \mathrm{SP},\ \leqslant,\ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & c & \end{array} \qquad (P') \quad (\min),\ \mathrm{SP},\ \geqslant,\ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c \\ \hline b & 0 & \end{array}$$

For (P) er den først bibetingelse, $x \leqslant b$, umulig at opfylde, hvis $b < 0$. Tilsvarende gælder for (P'), at den anden bibetingelse, $-y \geqslant c$, dvs $y \leqslant -c$, er umulig at opfylde, når $c > 0$.

Med passende kombinationer af fortegn på b, c opnås altså let alle tilfældene 1°–4°.

Eksempel 41. Gårdmand Bjørns grise behøver pr. uge 60 enheder af proteinet A, 84 enheder af B og 72 enheder af C. Foderblandingen X har nøgletallene 3–7–3, dvs 1 kg indeholder 3 enheder A, 7 af B, og 3 af C. Tilsvarende er Y en 2–2–6-blanding. Blandingen X koster 10 kr/kg og Y koster 4 kr/kg. Bjørn køber pr uge x kg af X og y kg af Y, og vil gerne minimalisere prisen, $10x + 4y$. Men han må jo sørge for at grisene får, hvad de skal have:

$$3x + 2y \geqslant 60, \qquad 7x + 2y \geqslant 84, \qquad 3x + 6y \geqslant 72.$$

Eksempel 42. Min far har to papirmøller, X og Y, som producerer hhv 350 og 550 t/uge. Hver uge skal vi levere papir til tre trykkerier $T1$, $T2$, og $T3$, hhv 300, 400 og 200 t/uge. Vi må tage hensyn til transportomkostningerne: Fra X er de, til de tre trykkerier, hhv 27, 22, og 15 kr/t, og fra Y er de hhv 18, 16, og 12. Idet x_2 er antallet at tons, der transporteres fra mølle X til trykkeriet $T2$ (osv), er omkostningerne

$$27x_1 + 22x_2 + 15x_3 + 18y_1 + 16y_2 + 12y_3.$$

Det vil vi minimalisere, idet vi jo må overholde bibetingelserne:

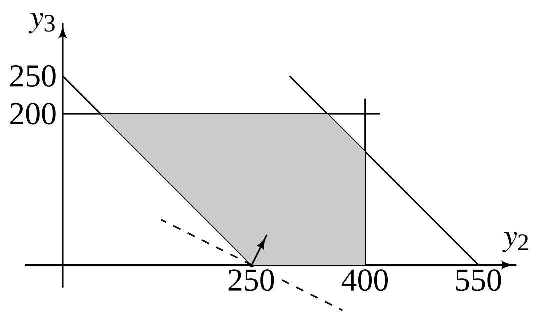
$$x_1 + x_2 + x_3 = 350,\ y_1 + y_2 + y_3 = 550,\ \ x_1 + y_1 = 300,\ x_2 + y_2 = 400,\ x_3 + y_3 = 200.$$

Idet vi fx dropper den første betingelse (den er jo en konsekvens af de øvrige), og skriver den anden betingelse sidst, er problemet på kompakt form:

$$
(\text{min}),\,\text{KP},\quad
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 300 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 200 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 550 \\
\hline
27 & 22 & 15 & 18 & 16 & 12 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -250 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 400 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 200 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 550 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 &
\end{array}
$$

Det svarer til et SP i to variable:

$$(\text{min})\quad 3y_2 + 6y_3 \quad \text{for } -y_2 - y_3 \leqslant -250, \quad y_2 \leqslant 400, \quad y_3 \leqslant 200, \quad y_2 + y_3 \leqslant 550.$$



Gradienten for $3y_2 + 6y_3$ er $(3, 6) \sim (1, 2)$; det fremgår, at minimum antages for $(y_2, y_3) = (250, 0)$, og så fås $y_1 = 300$, $x_3 = 200$, $x_2 = 150$, $x_1 = 0$.

Eksempel 43. Et generelt program: (P) maksimer $3t + 5x$ for

$$s - t + 2x = 1, \quad t + x \leqslant 2, \quad t + 2x \leqslant 3, \quad 2t + 3x \leqslant 4, \quad 2s - 3t + x \leqslant 1,$$

idet s, t er frie variable og x er bundet ($x \geqslant 0$). Brug den første ligning $\boxed{s = t - 2x + 1}$ til at eliminere s fra de øvrige bibetingelser og fra objektfunktionen:

$$(\text{max})\quad 3t + 5x \quad \text{for } t + x \leqslant 2, \quad t + 2x \leqslant 3, \quad 2t + 3x \leqslant 4, \quad -t - 3x \leqslant -1.$$

Med en restvariabel y ($y \geqslant 0$) erstattes den første ulighed med en ligning, $t + x + y = 2$, dvs $\boxed{t = -x - y + 2}$, og nu kan t elimineres:

$$(\text{max})\quad 2x - 3y \quad \text{for } x - y \leqslant 1, \quad x - 2y \leqslant 0, \quad -2x + y \leqslant 1;$$

idet en konstant er fjernet fra objektfunktionen. Det sidste problem har vi løst: maksimum antages for $x = 2$, $y = 1$, og så giver de gemte ligninger, at $t = -1$, $s = -4$.

Det duale program, før og efter et par omformninger:

$$
(P')\qquad (\text{min}),\quad
\begin{array}{cccccc|c}
\geqslant & & * & * & * & * & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 & -1 & 1 & 1 & 2 & -3 & 3 \\
* & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|c}
 & & * & * & * & * & \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\
* & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Kaldes de fem variable r, u, x, y, z, er de fire sidste bundne. Første række giver $\boxed{r + 2z = 0}$. Næste række giver $\boxed{u + x + 2y - z = 3}$. Da $u \geqslant 0$, er det uligheden $x + 2y - z \leqslant 3$, og tredie række er uligheden $x + y - 2z \geqslant 2$; objektfunktionen er $x + z$. Det har vi løst i et tidligere eksempel: $(x, y, z) = (1, 1, 0)$, og så er $u = 0$, $r = 0$.

Indsættelse i objektfunktionen giver $\sup(P) = 7$, $\inf(P') = 7$.

Betingelsen $\mathbf{c}^{\mathrm{t}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{t}}\mathbf{b}$ undersøges for $\mathbf{x}^{\mathrm{t}} = (s, t, x) = (-4, -1, 2)$, jfr [F, Sætning 4.7]:

Bibetingelser med '$<$': nummer 2,5; bundne variable med '> 0': nummer 3. Det giver for $\mathbf{y}^{\mathrm{t}} = (r, u, x, y, z)$: 2. og 5. koordinat = 0, dvs $u = z = 0$, og 3. bibetingelse en lighed. I forvejen er første og anden bibetingelse en lighed. Den første siger $r + 2z = 0$, altså $r = 0$, og nu siger de to øvrige, at $x + 2y = 3$, $2x + 3y = 5$, hvoraf $x = y = 1$. Altså $\mathbf{y}^{\mathrm{t}} = (0, 0, 1, 1, 0)$.

Omvendt kunne vi have checket et (heldigt) gæt på $(0, 0, 1, 1, 0)$ som den minimale løsning til (P'):

Bibetingelser med '$>$': ingen; bundne variable med '$>$': 3,4. Det giver for programmet (P): 3. og 4. bibetingelse er ligheder. Da 1. bibetingelse i (P) var lighed, kan vi løse: $(s, t, x) = (-4, -1, 2)$. Bingo, gættet var korrekt!