

MASO-Eksempler

Eksempel 1. Et par talfølger:

- (1) $0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$, $x_n = 0 \rightarrow 0$,
- (2) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$, $x_n = 1 \rightarrow 1$,
- (3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$, $x_n = (1 + (-1)^n)/2$,
- (4) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots$, $x_n = n(1 + (-1)^n)/4$,
- (5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$,
- (6) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots$, $x_n = 2 - 1/2^{n-1} \rightarrow 2$,
- (7) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \rightarrow \infty$,
- (8) $1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$, $y_n = x_{n+1}/x_n \rightarrow (1 + \sqrt{5})/2$,
- (9) $2, \frac{3^2}{2^2}, \frac{4^3}{3^3}, \frac{5^4}{4^4}, \frac{6^5}{5^5}, \dots$, $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$,
- (10) $\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \dots$, $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}} \rightarrow (1+\sqrt{5})/2$,
- (11) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$, $x_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$,
- (12) $2, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \frac{65}{24}, \frac{326}{120}, \dots$, $x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e$,
- (13) $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \dots$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$,
- (14) $1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{47}{60}, \dots$, $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \rightarrow \ln 2$,
- (15) $1, \frac{2}{3}, \frac{13}{15}, \frac{76}{105}, \frac{263}{315}, \dots$, $x_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \pm \frac{1}{2n-1} \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

At følgerne konvergerer som anført, er bestemt ikke oplagt.

Eksempel 2. Følgen i eksempel 1(7) er Fibonacci's talfølge, og følgen (y_n) i (8) er defineret ud fra den i (7). Hvis man *antager*, at følgen (y_n) er konvergent, er det ikke så svært at bestemme grænseværdien $y = \lim y_n$: Af $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ fås

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} + x_n}{x_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} + 1 = \frac{1}{y_n} + 1;$$

og så giver regler for regning med grænseværdi, at $y = 1/y + 1$, eller $y^2 - y - 1 = 0$, hvoraf

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

idet $y = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ er udelukket, da $y_n \geq 0$. Grænseværdien kaldes i øvrigt *det gyldne snit*.

Tilsvarende med (10): *Antages*, at følgen konvergerer (mod et tal x), så giver ligningen $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}}$ ved grænseovergang, at $x = \sqrt{1+x}$, hvoraf $x^2 = 1+x$, hvilket er ligningen for det gyldne snit. Det er i øvrigt ikke så svært at vise, at antagelserne er korrekte.

Eksempel 3. Hvem vinder:

$$\frac{2^n}{n^{500} + 3n^2} \rightarrow \infty, \quad \frac{\log(n^{500} + 300n)}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{2n^{500} + 300}{n^{501} + 1} + \frac{2n^{500} + 1}{3n^{500} + 300} \rightarrow 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Den sidste bruger, for polynomier i tæller og nævner, at „graden bestemmer“.

Eksempel 4. $x_n := \sqrt[n]{2} = 2^{1/n} \rightarrow 2^0 = 1$, fordi $1/n \rightarrow 0$ og 2^x er kontinuert.

$y_n := \sqrt[n]{n} = n^{1/n} \rightarrow 1$, fordi $\log y_n = \log(n^{1/n}) = \frac{1}{n} \log n \rightarrow 0$ (hvem vinder!), og så vil $y_n = \exp(\log y_n) \rightarrow e^0 = 1$.

Eksempel 5. Fakultet, $n!$, vinder over eksponentialfunktion, a^n , men taber til n^n :

$$\lim a^n/n! = 0, \quad \lim n!/n^n = 0.$$

Eksempel 6. Rækken $\sum \frac{1}{n}$ er divergent: I afsnitssummen s_n sættes parenteser: omkring første led $\frac{1}{1}$ (det er ret overflødigt), omkring de næste to, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, omkring de næste fire $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, omkring de næste otte osv. Der kan sættes k parenteser, når $n \geq 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. For $j = 0, 1, 2, \dots$ står der i den j 'te parentes 2^j brøker, hvoraf den første (og største) er $\frac{1}{2^j}$. Summen af brøkerne i den j 'te parentes er derfor mindst lig med $2^j \cdot 1/2^j = 1$. Summen af de k parenteser er derfor mindst $k \cdot 1 = k$. For et givet k har vi altså $s_n \geq k$, når $n \geq 2^k - 1$. Altså $s_n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$.

Eksempel 7. Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ er konvergent: Sammenlign med kvotientrække, fx med $\sum (1/2)^n$, som vides at være konvergent. For $n \gg 0$ er $1/n! \leq 1/2^n$ (hvem vinder?), og det er nok. Faktisk er $1/n! \leq 1/2^{n-1}$ for alle $n \geq 1$, og derfor er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots = 2.$$

Lægges 1 til på begge sider fås, at $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! \leq 3$. Faktisk er $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = e$.

Eksempel 8. Kig på rækkerne (men henblik på konvergens/divergens):

$$\begin{aligned} (1) \sum \frac{n^2 + n + 1}{4n^2 - 1}, \quad (2) \sum \frac{n^2 + n + 1}{4n^3 - 1}, \quad (3) \sum \frac{n^2 + n + 1}{4n^4 - 1}, \\ (4) \sum \frac{n^{2n} + n^n + 1}{4n^{3n} - 1}, \quad (5) \sum \frac{(n+1)^2}{n!}, \quad (6) \sum \frac{(n+1)!}{2n^2}. \end{aligned}$$

(1) er divergent, da $a_n \rightarrow \frac{1}{4}$; betingelsen $a_n \rightarrow 0$ er altså ikke opfyldt. I (2) er tælleren i a_n , altså $n^2 + n + 1$, af samme størrelsesorden som n^2 ; derfor er brøken a_n af samme størrelsesorden som brøken $b_n := n^2/(4n^2 - 1)$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n^2 + n + 1)/(4n^3 - 1)}{n^2/(4n^2 - 1)} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2} \rightarrow 1.$$

Derfor er rækkerne $\sum a_n$ og $\sum b_n$ samtidig konvergente. Med andre ord: i a_n kan $n^2 + n + 1$ i tælleren erstattes af n^2 , når man undersøger konvergens. Tilsvarende kan nævneren $4n^3 - 1$ erstattes af n^3 . Når det er gjort, er a_n erstattet af $n^2/n^3 = 1/n$; Da $\sum 1/n$ er divergent, er (2) divergent.

Tilsvarende er (3) konvergent: a_n i (3) har samme størrelsesorden som $n^2/n^4 = 1/n^2$, og $\sum 1/n^2$ er konvergent.

I (4) er a_n af samme størrelsesorden som $b_n := n^{2n}/n^{3n} = 1/n^n$; da $\lim \sqrt[n]{b_n} = \lim 1/n = 0$, er $\sum b_n$, og dermed også (4), konvergent.

Rækken (5) er konvergent, idet

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2 \cdot n!}{(n+1)^2 \cdot (n+1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

og (6) er konvergent, idet

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = (n+2)2^{n^2-(n+1)^2} = (n+2)/2^{2n+1} \rightarrow 0.$$

Eksempel 9. Regning med potensrækker. For $|x| < 1$ er:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = (1-x)^{-1}, \quad 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = (1-x^2)^{-1},$$

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) = x/(1-x^2).$$

For eksempel er $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \dots = \frac{1}{2}/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$.

Eksempel 10. Et par Taylorrækker, den første for $|x| < 1$, de øvrige for alle x :

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Eksempel 11. Regning med komplekse tal:

$$(-3-4i) + (-1+2i) = (-3-1) + (-4+2)i = -4-2i,$$

$$(-3-4i)(-1+2i) = (-3)(-1) + (-3) \cdot 2i + (-4)(-1)i + (-4) \cdot 2i^2$$

$$= 3 + (-6+4)i - 8i^2 = 11-2i,$$

$$(-1+2i)^2 = -3-4i, \quad (-1+2i)^3 = (-3-4i)(-1+2i) = 11-2i,$$

$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = (1-6+1) + (4-4)i = -4;$$

i den sidste regning indgår binomialformlen $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ og udregningen af potenserne af i :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

Eksempel 12. Nogle komplekse størrelser:

z	$\operatorname{Re} z$	$\operatorname{Im} z$	$ z $	$\arg z$	$\bar{z}$	$1/z$
1	1	0	1	$0, 2\pi, \dots$	1	1
-1	-1	0	1	$-\pi, \pi, 3\pi, \dots$	-1	-1
i	0	1	1	$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$	$-i$	$-i$
$1 + i$	1	1	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots$	$1 - i$	$\frac{1}{2}(1 - i)$
$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \dots$	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$3 + 4i$	3	4	5	$\operatorname{Arctan}(\frac{4}{3})$	$3 - 4i$	$\frac{1}{25}(3 - 4i)$
$11 - 2i$	11	-2	$5\sqrt{5}$	$\operatorname{Arctan}(\frac{-2}{11})$	$11 + 2i$	$\frac{1}{125}(11 + 2i)$

$\operatorname{Arctan}(t) = \tan^{-1} t$ er længden af den bue (vinkel) θ , med $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, som opfylder, at $\tan \theta = t$.

Eksempel 13. Nogle kvadratrødder:

$$\begin{aligned}\sqrt{1} &= \pm 1, & \sqrt{-1} &= \pm i, & \sqrt{i} &= \pm(1 + i)/\sqrt{2}, \\ \sqrt{1 + i} &= \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}, \\ \sqrt{-3 + 4i} &= \sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} - 3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2 + 4^2} + 3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}} = 1 + 2i;\end{aligned}$$

de to sidste resultater kan også multipliceres med -1 .

En kubikrod af 1 (en *tredie enhedsrod*) er en af de tre løsninger til ligningen $z^3 = 1$, altså ud over 1 også

$$\pm(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = \pm(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

For kvadratroden fås:

$$\sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}) = \pm(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

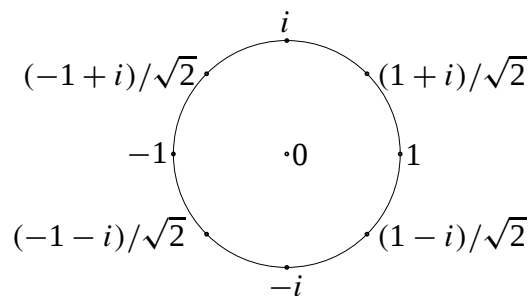
En kubikrod af $11 - 2i$, altså en løsning til $z^3 = 11 - 2i$, bestemmes ved et (heldigt) gæt: $|11 - 2i| = \sqrt{125} = (\sqrt{5})^3$, så $|z| = \sqrt{5}$. Hvis $z = x + iy$, er altså $x^2 + y^2 = 5$. Hvis x, y her skulle være hele tal (det er det, der er det heldige gæt!), måtte vi have $(x, y) = (\pm 1, \pm 2)$ eller $(\pm 2, \pm 1)$. En let udregning giver, at $(-1 + 2i)^3 = 11 - 2i$. Altså er $z = -1 + 2i$ en løsning. De to andre løsninger fås ved at multiplicere z med en tredie enhedsrod.

Eksempel 14. Der er tre rødder i polynomiet $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$,

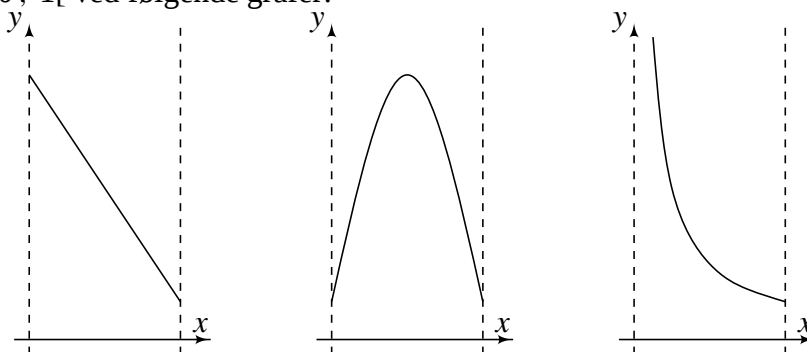
$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z - 1)(z - 2)(z - 3).$$

Som bekendt gælder nemlig (kendt fra gymnasiet): Hvis $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ har heltalskoefficienter (dvs $a_i \in \mathbb{Z}$) og en uforkortelig brøk a/s er rod i $p(z)$, så er $a \mid a_0$ og $s \mid a_n$. For polynomiet her er $n = 3$ og $a_n = 1$. Resultatet siger derfor: Hvis a/s er rod i $p(z)$, så er $s = 1$ (dvs a/s er et helt tal) og $a \mid 6$. Rationale rødder i $p(z)$ findes altså blandt de hele tal a , der går op i 6, dvs $a = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. En simpel udregning viser, at $w = 1$ og $w = 2$ er rødder. Og så kan den sidste rod, $w = 3$, fx findes ved at udnytte, at $w_1 w_2 w_3 = -a_3 = 6$.

Eksempel 15. Der er 8 rødder i ligningen $z^8 = 1$, thi $z^8 = 1$ betyder, at $|z|^8 = 1$, dvs $|z| = 1$, og $8 \arg(z) = \arg(1)$, dvs $\arg(z) = 0, 2\pi/8, 4\pi/8, 6\pi/8, \dots$:



Eksempel 16. Betragt de tre funktioner f_0, f_1, f_2 , definerede på det åbne (begrænsede) interval $]0, 1[$ ved følgende grafer:



Det er funktionerne $f = -x + 2$, $g = 4x(1 - x) + 1$ og $h = 1/x$ (lidt fortegnede).

Billedmængden for f er det åbne interval $]1, 2[$, og supremum (over $x \in S$) er $\sup f(x) = 2$. Men 2 er ikke en funktionsværdi, så f kan ikke maksimeres.

Billedmængden for g er intervallet $]1, 2]$, og igen er $\sup g(x) = 2$. Her er 2 en funktionsværdi, nemlig $g(\frac{1}{2}) = 2$. Altså maksimeres $g(x)$ i maksimumpunktet $x = \frac{1}{2}$.

Billedmængden for h er intervallet $[1, \infty[$, så der er vilkårligt store funktionsværdier. Her er $\sup h(x) = +\infty$, og h kan ikke maksimeres.

Eksempel 17. Tilsvarende med funktioner definerede på det afsluttede (ubegrænsede) interval $S := [0, \infty[$, fx $f(x) = 1 - e^{-x}$, $g(x) = e^{-x}$ og $h(x) = x$.

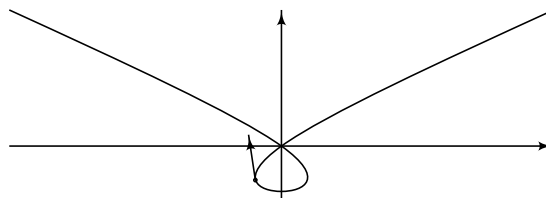


Her er $f(S) = [0, 1[$, og $g(S) =]0, 1]$ ($x = 0$ er maksimumspunktet), og $h(S) = [0, \infty[$.

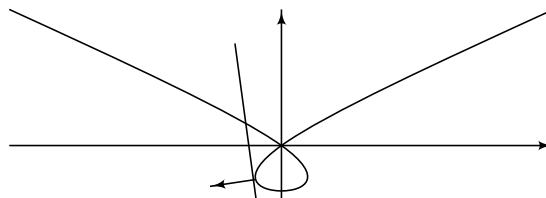
Eksempel 18. En plan kurve (vektorfunktion med 2 koordinater, i én variabel):

$$\begin{aligned} x &= t^3 - t, & x' &= 3t^2 - 1, \\ y &= t^2 - 1, & y' &= 2t, \end{aligned} \quad \text{eller } \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Til $t = \frac{1}{2}$ svarer punktet på kurven: $(x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2})) = (-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$. Tangentvektoren i dette punkt er $(x'(\frac{1}{2}), y'(\frac{1}{2})) = (-\frac{1}{4}, 1)$.



Eksempel 19. En plan kurve: niveaukurven $f = 0$ for funktionen $f = x^2 - y^3 - y^2$. Gradienten er $f' = (2x, -3y^2 - 2y)$. Det er samme kurve som den i det foregående eksempel. I punktet $(x, y) = (-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$ er gradienten lig med $f' = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{16})$, vinkelret på tangenten.



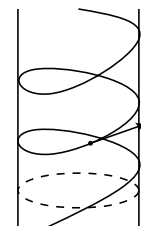
Punktet (x, y) ligger på tangenten til kurvepunktet $(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4})$, hvis og kun hvis

$$\begin{pmatrix} x - (-3/8) \\ y - (-3/4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ -3/16 \end{pmatrix} = 0.$$

Multiplikation med $8 \cdot 16/3$ giver tangentens ligning: $8x + 32y + 27 = 0$.

Eksempel 20. En rumkurve (vektorfunktion med 3 koordinater, i én variabel):

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix},$$



Eksempel 21. En reel funktion af 3 variable: $f = e^{2x-y} \ln(1+z^2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2x-y} \cdot 2 \cdot \ln(1+z^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{2x-y} \ln(1+z^2), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{2x-y} \frac{2z}{1+z^2}.$$

Eksempel 22. En flade i rummet: niveaufladen $f = 1$ for $f = x^2 + y^2 + 7z^2$ (en ellipsoide). Gradienten er $f' = (\nabla f)^t = (2x, 2y, 14z)$. Punktet $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ligger på fladen, og her er $f' = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14}{3})$. Punktet (x, y, z) ligger på tangentplanen, hvis og kun hvis $(x, y, z) - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ er vinkelret på gradienten, altså hvis og kun hvis

$$\begin{pmatrix} x - 1/3 \\ y - 1/3 \\ z - 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 14/3 \end{pmatrix} = 0,$$

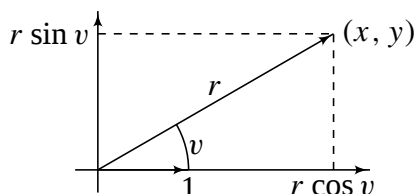
dvs hvis og kun hvis $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{14}{3}z = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 2$. Multiplikation med $\frac{3}{2}$ giver følgende ligning for tangentplanen:

$$x + y + 7z = 3.$$

Eksempel 23. En vektorafbildning (transformation) i to variable:

$$\begin{aligned} x &= r \cos v, \\ y &= r \sin v; \end{aligned} \quad \mathbf{f}(r, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix}.$$

De to ligninger definerer en vektorafbildning $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^2$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^2$ fx kan være mængden af punkter (r, v) , hvor $r > 0$. For givne r, v er billedvektoren (x, y) bestemt ved at dens norm er r og dens argument (vinklen fra x -aksen til vektoren) er v :



Jacobi-matricen er

$$\mathbf{f}' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \end{pmatrix},$$

med determinanten $r \cos^2 v + r \sin^2 v = r$. Specielt er determinanten forskellig fra 0, så Jacobi-matricen har en invers.

Et punkt P i planen er bestemt ved sit koordinatsæt (x, y) (de *retvinklede koordinater*), men det kan også bestemmes ved (r, v) (de *polære koordinater*). En funktion $u = u(P)$, der til punkter P i planen knytter reelle tal, kan derfor opfattes som en funktion af 2 variable $u = h(x, y)$, men den kan lige så godt fastlægges som en funktion $u = k(r, v)$. De to funktioner, u som funktion af x, y og u som funktion af r, v beskriver i en vis forstand den samme funktion, nemlig u som funktion af punktet P . Det er i det lys man må se kædereglene:

$$(\partial u / \partial r, \partial u / \partial v) = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y) \begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \end{pmatrix}.$$

30. oktober 2002

Eksempel 24. Ligningen $\tan y = x$ er opfyldt for $(x, y) = (0, 0)$. Bestemmer ligningen y som funktion af x nær $(0, 0)$? Med $f := \tan y - x$ er $f_x = -1$ og $f_y = (\tan y)' = 1 + \tan^2 y$. Da $f_y' \neq 0$, er svaret „ja“. Differentialkvotienten $y' = dy/dx$ bestemmes af ligningen $0 = f'_x + f'_y \cdot y'$, altså

$$(*) \quad y' = -(f'_y)^{-1} f'_x = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Funktion $y = y(x)$ er defineret i et lille interval omkring 0. Faktisk gælder for hvert reelt tal x , at ligningen $\tan y = x$ har en og kun én løsning y med $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Ligningen og betingelsen på y :

$$x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

bestemmer altså y som en funktion $y = y(x)$ defineret for alle $x \in \mathbb{R}$. Den betegnes $y = \text{Arctan}(x)$ eller (på en lommeregner) $y = \tan^{-1} x$. Den opfylder ligningen (*).

Eksempel 25. Bestemmer ligningen, cfr. [S, s. 90],

$$x^2 e^y - 2y + x = 0,$$

y som funktion af x nær $(x_0, y_0) = (-1, 0)$? Idet $f(x, y)$ er ligningens venstreside, er

$$f'_x = 2xe^y + 1, \quad f'_y = x^2 e^y - 2.$$

Specielt, i punktet $(-1, 0)$ er $f'_y = -1 \neq 0$. Derfor er svaret: ja! For denne funktion, $y = \varphi(x)$, er $\varphi(x_0) = y_0$, altså $\varphi(-1) = 0$. Differentialkvotienten bestemmes af ligningen $f'_x + f'_y y' = 0$, altså

$$(**) \quad (2xe^y + 1) + (x^2 e^y - 2)y' = 0.$$

Indsættelse af $(x, y) = (-1, 0)$ giver $0 = (-1) + (-1)y'$, hvoraf $y' = 0$; altså: $\varphi'(-1) = -1$.

Samme spørgsmål med $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Her er $f'_y = -2 \neq 0$, så svaret er igen: ja! For denne funktion, $y = \psi(x)$, er $\psi(0) = 0$, og $0 = 1 + (-2)y'$, hvoraf $y' = 1/2$; altså: $\psi'(0) = 1/2$.

Bemærk, at sætningen om implicit givet funktion kun giver, at den første funktion φ er defineret i et interval omkring $x = -1$, og tilsvarende, at den anden funktion ψ er defineret i et interval omkring $x = 0$. Sætningen giver ikke, at de to funktioner er den samme funktion, defineret i et interval, der indeholder både -1 og 0 . [Men det er de, i dette tilfælde.]

Højere afledede fås ved at differentiere (**) med hensyn til x , idet man tænker sig y indsat som funktion af x . Fx skal e^y differentieres som en sammensat funktion: differentialkvotienten mht til x er $e^y y'$. Differentiationen giver:

$$(***) \quad (2e^y + 2xe^y y') + (2xe^y + x^2 e^y y')y' + (x^2 e^y - 2)y'' = 0.$$

I $(-1, 0)$ var $y' = -1$, så ligningen giver $(2 - 2 \cdot (-1)) + (-2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1))(-1) + (1 - 2)y'' = 0$, hvoraf $7 - y'' = 0$, dvs $y'' = 7$. Altså er $\varphi''(-1) = 7$.

I $(0, 0)$ var $y' = 1/2$, så ligningen giver $2 + 0 + (-2)y'' = 0$, hvoraf $y'' = 1$. Altså er $\psi''(0) = 1$.

Eksempel 26. Bestemmer ligningen,

$$x^2 e^y - 2y + z = 0,$$

y som funktion af (x, z) nær $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, -1)$? Idet $f(x, y, z)$ er ligningens venstreside, er

$$f'_x = 2xe^y, \quad f'_y = x^2 e^y - 2, \quad f'_z = 1.$$

Specielt, i punktet $(-1, 0, -1)$ er $f'_y = -1 \neq 0$. Derfor er svaret: ja! Idet $y = \varphi(x, z)$ er denne funktion, defineret nær $(x, z) = (-1, -1)$ og med værdien $\varphi(-1, -1) = 0$, bestemmes de afledede $y' = (\partial y / \partial x, \partial y / \partial z)$ af $f'_{x,z} + f'_y \cdot y' = 0$, altså

$$(**) \quad (2xe^y, 1) + (x^2 e^y - 2)(\partial y / \partial x, \partial y / \partial z).$$

Indsættelse af $(x, y, z) = (-1, 0, -1)$ giver $(-2, 1) + (-1)(\partial y / \partial x, \partial y / \partial z) = (0, 0)$, hvorefter $\partial y / \partial x = 2$ og $\partial y / \partial z = -1$. Altså: $\varphi'_x(-1, -1) = 2$ og $\varphi'_z(-1, -1) = -1$.

Samme spørgsmål med $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$: Her er $f'_y = -2$, så: ja! Idet $y = \psi(x, z)$ er denne funktion, defineret for (x, z) nær $(0, 0)$ og med værdien $\psi(0, 0) = 0$ bestemmes $y' = \psi'$ af (**), med $(0, 0, 0)$ indsat: $(0, 1) + (-2)(\partial y / \partial x, \partial y / \partial z) = (0, 0)$. Altså $\psi'_x(0, 0) = 0$ og $\psi'_z(0, 0) = 1/2$.

Bestemmer ligningen z som funktion af (x, y) ?

Eksempel 27. Den inverse til en 2×2 matrix er god at kende som en formel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

eller med ord: „byt om på tallene i diagonalen, skift fortegn på dem uden for, og divider med determinanten“.

Eksempel 28. Bestemmer ligningerne

$$x^3 - y^2 = 0,$$

$$x^2 - ty = 0,$$

x og y som funktioner af t , altså $x = x(t)$, $y = y(t)$, nær $(t_0, x_0, y_0) = (2, 4, 8)$?

Det er tilfældet $n = 1, m = 2$: Søjlen $\mathbf{f}$ består her af de to funktioner f, g på venstresiden, $\mathbf{x}'$ erne er den ene variabel t og $\mathbf{y}'$ erne er (x, y) . Bogens $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}$ er her $\mathbf{f}'_t$ og $\mathbf{f}'_{x,y}$:

$$\mathbf{f}'_t = \frac{\partial(f, g)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}'_{x,y} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & -t \end{pmatrix}.$$

Determinanten af matricen er:

$$|\mathbf{f}'_{x,y}| = \left| \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \right| = \begin{vmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & -t \end{vmatrix} = -3x^2t + 4xy.$$

I det givne punkt er værdien $= -3 \cdot 4^2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 8 = 32 \neq 0$. Derfor er svaret ja!

Af $x(t_0) = x_0$ og $y(t_0) = y_0$ får vi $x(2) = 4$, $y(2) = 8$. De afledede funktioner x' og y' bestemmes af formelen,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}'_t + \mathbf{f}'_{x,y} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

dvs

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \\ 2x & -t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}.$$

For $t = t_0 = 2$ er altså

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 48 & -16 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1/16 & 1/2 \\ -1/4 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix},$$

dvs $x'(2) = 4$, $y'(2) = 12$.

I dette tilfælde er det nu ikke så svært at bestemme x , y eksplicit ud fra ligningerne: Når $x \neq 0$, finder man let $x = t^2$, $y = t^3$.

Eksempel 29. Bestemmer ligningerne,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ \sin 2t - 2xy &= 0, \end{aligned}$$

x , y som funktioner af t nær ved $(x, y, t) = (1, 0, 0)$? Idet $\mathbf{f}$ er vektorafbildningen givet ved venstresiden, fås:

$$|\mathbf{f}'_{x,y}| = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = 4(y^2 - x^2).$$

Determinanten, efter indsættelse af $(x, y, t) = (1, 0, 0)$, er altså $-4 \neq 0$, så svaret er ja. Jakobimatricen for x , y som funktioner af t bestemmes af:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -(\mathbf{f}'_{x,y})^{-1} \mathbf{f}'_t = -\frac{1}{4(y^2 - x^2)} \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix} = \frac{\cos 2t}{x^2 - y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

For $t = 0$ er $x(0) = 1$ og $y(0) = 0$, og altså $x'(0) = 0$ og $y'(0) = 1$. Det er heller ikke så svært at løse ligningerne explicit.

Eksempel 30. Vektorafbildningen $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x &= r \cos v, \\ y &= r \sin v; \end{aligned} \quad \mathbf{f}(r, v) = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix},$$

defineret på delmængden $S \subseteq \mathbb{R}^2$, hvor $r > 0$, er betragtet tidligere. Findes den inverse afbildning, eventuelt lokalt? Det er spørgsmålet, om man, for et givet (x, y) , ud fra de to ligninger, kan bestemme (r, v) entydigt. Det er let nok med r : Af ligningerne følger

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 v + r^2 \sin^2 v = r^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) = r^2.$$

For $(x, y) = (0, 0)$ får vi $r = 0$, som ikke er brugbar, da vi søger et $r > 0$. Antag, at $(x, y) \neq (0, 0)$. Da følger det, at

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tallet r er altså normen af vektoren (x, y) . Det er også klart fra ligningerne, at v er en vinkel fra vektoren $(1, 0)$ til vektoren (x, y) .

Men så er der et lille problem: hvis v er en sådan vinkel, så er alle tallene $\dots, v - 2\pi, v, v + 2\pi, v + 4\pi, \dots$ også vinkler. Vinklen v er altså ikke entydigt bestemt ved (x, y) . Men lokalt kan vinklen fastlægges: Antag, at det er givet, at $(x_0, y_0) = (r_0 \cos v_0, r_0 \sin v_0)$, og specielt at v_0 er en bestemt af vinklerne til (x_0, y_0) . Så kan en vinkel til en vektor (x, y) tæt ved (x_0, y_0) fastlægges som den, der ligger tættest ved v_0 . Altså har afbildningen lokalt en invers afbildning.

For at anvende sætningen om invers afbildning betragtes Jacobi-matricen,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \end{pmatrix},$$

med determinant $r \cos^2 v + r \sin^2 v = r$. Den er forskellig fra 0, da vi betragter punkter $(r, v) \in S$, hvor $r > 0$. Altså findes den inverse, lokalt, og Jacobi-matricen til den inverse er den inverse Jacobi-matrix:

$$\frac{\partial(r, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos v & -r \sin v \\ \sin v & r \cos v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos v & r \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

På højresiden kan vi bruge vores viden: $r \cos v = x$ og $r \sin v = y$, og derfor er $\cos v = x/r$ og $\sin v = y/r$. Videre er $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, så indsættelse giver:

$$\frac{\partial(r, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x & y \\ -y/\sqrt{x^2 + y^2} & x/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} & y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y/(x^2 + y^2) & x/(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Øverste række er $(\partial r / \partial x, \partial r / \partial y)$; den er ingen overraskelse, da $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nederste række er tilsvarende de partielle afledede af v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

og det er mere overraskende: Vi har ikke et explicit „udtryk“, der giver vinklen v som funktion af (x, y) for alle punkter (og sådan et udtryk findes faktisk ikke); alligevel har vi fundet udtryk for de partielle afledede $\partial v / \partial x$ og $\partial v / \partial y$.

Eksempel 31. Normen er en konveks funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, thi når $0 < \lambda < 1$, så er

$$|\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}| \leq |\lambda \mathbf{x}| + |(1 - \lambda) \mathbf{y}| = \lambda |\mathbf{x}| + (1 - \lambda) |\mathbf{y}|;$$

for det sidste lighedstegn er det benyttet, at λ og $1 - \lambda$ er positive skalarer.

Man kan også differentiere $r = |\mathbf{x}|$, fx for $n = 2$, hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Man finder $\partial r / \partial x = 1/(2\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot 2x = x/r$, og analogt for y :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

og heraf videre,

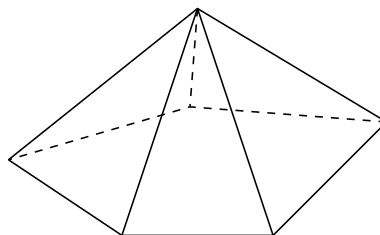
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1 \cdot r - x(x/r)}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r} \right) = x(-1)r^{-2}(y/r) = \frac{-xy}{r^3}. \end{aligned}$$

og analogt for $\partial^2 r / \partial y^2$. Hesse-matricen bliver herefter:

$$r'' = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

Det ser jo positiv semidefinit ud: i diagonalen står kvadrater, ≥ 0 , og determinanten af matricen er 0. *Men pas på:* Udregningen gælder kun for $r \neq 0$, dvs $(x, y) \neq (0, 0)$, og den delmængde af $\mathbb{R}^2$, der bliver tilbage, når man fjerner $(0, 0)$, er *ikke* konveks. Udregningen fortæller således ikke (umiddelbart), at r er en konveks funktion.

Eksempel 32. I dimension $n \geq 3$ kan man godt have flere end n bibetingelser aktive i et hjørne, uden at S er særlig patologisk. Fx, i dimension 3, en pyramide, hvis grundflade er en 5-kant.



I toppunktet er 5 bibetingelser aktive, svarende til de 5 sideflader, der går gennem punktet.

30. oktober 2002

Eksempel 33. Et KP (kanonisk program), i $n=5$ variable u, v, w, x, y , med $m=3$ bibetingelser, før og efter omformning til reduceret trappeform:

$$\begin{array}{rclcl} u & +w & -x & & =2, & u & & +x & -y & =1, \\ u-v & & & +y & =1, & v & & +x & -2y & =0, \\ u & & +x & -y & =1, & w & -2x & +y & =1, \\ & & 2x & -3y & & & 2x & -3y & & \end{array}$$

(I et KP er alle bibetingelser er ligninger, og alle variable er ≥ 0 .) Der søges maksimum af objektfunktionen i nederste række. På matrixform:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} \text{Maks., KP,} & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccccc|c} \text{Maks., KP,} & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \end{array}$$

Tilladte basisløsninger: Af 3-sæt af de 5 søjler er der $\binom{5}{3}=10$. Fx:

$$345 \text{ giver } (w, x, y) = (4, 2, 1), \quad \text{eller kort: } 345 : (4, 2, 1),$$

der betyder, at søjlerne med numrene 3,4,5, altså $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ giver en tilladt basisløsning: Vi har $4\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}$. Løsningen er fundet ved at løse ligningssystemet,

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & 1, \\ x - 2y & = & 0, \\ w - 2x + y & = & 1. \end{array}$$

Prøves alle 3-sættene bliver resultatet:

$$\begin{array}{llllll} 123: & (1, 0, 1) & ; & 124: & - & ; & 125: & (2, 2, 1) & ; & 134: & (1, 1, 0) & ; & 135: & (1, 1, 0); \\ 145: & - & ; & 234: & - & ; & 235: & - & ; & 245: & - & ; & 345: & (4, 2, 1); \end{array}$$

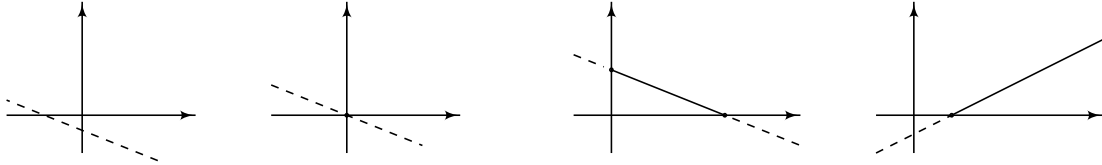
et '−' markerer, at mindst én koordinat er negativ (og dermed ikke tilladt). Der er 5 valg, der giver en tilladt basisløsning, men 123, 134, og 135 giver naturligvis den samme, svarende til at $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$. I alt findes 3 tilladte basisløsninger:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Objektfunktionen, $2x - 3y$, har i de tre tilladte basisløsninger værdierne 0, −3, og +1. Den sidste basisløsning er altså kandidat til en maksimal løsning.

30. oktober 2002

Eksempel 34. Tilladte løsninger til et KP i planen ($n=2$) med $m=1$ bibetingelse:

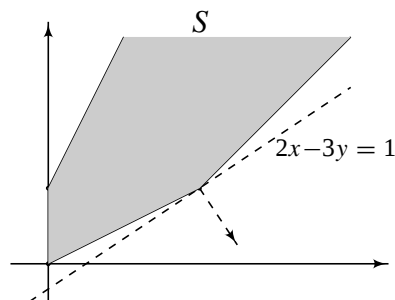


Mængden S af tilladte løsninger er, i de 4 eksempler: tom, et punkt, et liniestykke, og en halvlinje.

Eksempel 35. Et standardprogram (SP) i $n=2$ variable, med $m=3$ bibetingelser:

$$\begin{array}{rcll}
 x - y \leq 1, & (P) & \text{Maks., SP, } \leq, & \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -3 & \end{array} \\
 x - 2y \leq 0, & & & \\
 -2x + y \leq 1, & & & \\
 2x - 3y & & &
 \end{array}$$

Omformningen af (P) til et KP fører til programmet i et foregående eksempel. Men det er lettere at behandle standardprogrammet:



Mængden S af tilladte løsninger er her en (ubegrænset) polygon, med hjørner i $(0, 1)$, $(0, 0)$, og $(2, 1)$, og $2x - 3y$ giver den største værdi, $= 1$, i det tredje hjørne. Niveaulinien gennem dette punkt er linien med ligningen $2x - 3y = 1$. Da S ligger over denne linie og gradienten peger væk fra S , er punktet et maksimumspunkt.

Eksempel 36. Det duale program til (P) fra den foregående opgave:

$$\begin{array}{rcll}
 (P') & \text{Min., SP, } \geq, & \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \end{array} & \begin{array}{l} x + y - 2z \geq 2, \\ -x - 2y + z \geq -3, \\ x + z, \end{array}
 \end{array}$$

hvor der søges minimum af objektfunktionen $x + z$. Først omformes (P') til et KP ved at tilføje restvariable u, v :

$$\begin{array}{rcll}
 (Q) & \text{Min., KP,} & \begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}
 \end{array}$$

30. oktober 2002

Basisløsninger: alle 2-sæt ud af 5 søjler afprøves:

12: — ; 13: (1, 3) ; 14: — ; 15: — ; 23: (1, 2) ;
 24: — ; 25: — ; 34: (1, 1) ; 35: (4, 1) ; 45: — ;

altså 4 tilladte basisløsninger til (Q) :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvor objektfunktionen $x + z$ har værdierne 3, 2, 1, 5. Minimumskandidaten for (Q) er altså den 3. basisløsning, med værdien 1. For programmet (P') er minimumskandidaten derfor $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Det er let at se her, at minimumskandidaten faktisk er en minimal løsning til (P') : Enten fordi objektfunktionen $x + z$, på mængden S' af tilladte løsninger, er nedad begrænset (den er altid ≥ 0), eller fordi S' er begrænset (bibetingelse (1)+(2) giver $y + z \leq 1$, og $(1)+2\cdot(2)$ giver $x + 3y \leq 4$).

Eksempel 37. Den tilstrækkelige betingelse: Med $\mathbf{y}^t = (1, 1, 0)$ som minimumskandidat for (P') fås, for et eventuelt maksimumspunkt $\mathbf{x}^t = (x, y)$ for (P) , følgende ligninger: Da de to første koordinater i $\mathbf{y}$ er > 0 , er de to første bibetingelser for $\mathbf{x}$ ligheder, dvs $x - y = 1$ og $x - 2y = 0$. De to ligninger er jo nemme at løse: $\mathbf{x}^t = (x, y) = (2, 1)$ og det er en tilladt løsning til (P) . Derfor er kandidaten $\mathbf{y}$ en minimal løsning til (P') og $\mathbf{x}$ er en maksimal løsning til (P) .

Omvendt, ud fra $\mathbf{x}^t = (2, 1)$ som maksimumskandidat for (P) fås, for et eventuelt minimumspunkt $\mathbf{y}^t = (x, y, z)$ til (P') : Begge koordinater for $\mathbf{x}$ er > 0 , så begge bibetingelser for $\mathbf{y}$ skal være ligheder; desuden, da den 3. bibetingelse for $\mathbf{x}$ gælder med skarp ulighed, er tredje-koordinaten i (x, y, z) lig med 0. Nu er det nemt at løse: $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Det er en tilladt løsning til (P') . Derfor er kandidaten $\mathbf{x}$ en maksimal løsning til (P) og $\mathbf{y}$ er en minimal løsning til (P') .

Eksempel 38. Nogle ret trivielle standardprogrammer, $m=n=2$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} (P) & \text{Maks., SP, } \leq, & 1 & 0 & b \\ & & 0 & -1 & 0 \\ \hline & & 0 & c & \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} (P') & \text{Min., SP, } \geq, & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & c \\ \hline & & b & 0 & \end{array}$$

For (P) er den først bibetingelse, $x \leq b$, umulig at opfylde, hvis $b < 0$. Tilsvarende gælder for (P') , at den anden bibetingelse, $-y \geq c$, dvs $y \leq -c$, er umulig at opfylde, når $c > 0$.

Med passende kombinationer af fortegn på b, c opnås altså let alle tilfældene $1^\circ-4^\circ$.

30. oktober 2002

Eksempel 39. Gårdmand Bjørns grise behøver pr. uge 60 enheder af proteinet A , 84 enheder af B og 72 enheder af C . Foderblandingen X har nøgletallene 3–7–3, dvs 1 kg indeholder 3 enheder A , 7 af B , og 3 af C . Tilsvarende er Y en 2–2–6-blanding. Blandingen X koster 10 kr/kg og Y koster 4 kr/kg. Bjørn køber pr uge x kg af X og y kg af Y , og vil gerne minimalisere prisen, $10x + 4y$. Men han må jo sørge for at grisene får, hvad de skal have:

$$3x + 2y \geq 60, \quad 7x + 2y \geq 84, \quad 3x + 6y \geq 72.$$

Eksempel 40. Min far har to papirmøller, X og Y , som producerer hhv 350 og 550 t/uge. Hver uge skal vi levere papir til tre trykkerier $T1$, $T2$, og $T3$, hhv 300, 400 og 200 t/uge. Vi må tage hensyn til transportomkostningerne: Fra X er de, til de tre trykkerier, hhv 27, 22, og 15 kr/t, og fra Y er de hhv 18, 16, og 12. Idet x_2 er antallet af tons, der transporteres fra mølle X til trykkeriet $T2$ (osv), er omkostningerne

$$27x_1 + 22x_2 + 15x_3 + 18y_1 + 16y_2 + 12y_3.$$

Det vil vi minimalisere. Idet vi jo må overholde bibitingelserne:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 350, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 550, \quad x_1 + y_1 = 300, \quad x_2 + y_2 = 400, \quad x_3 + y_3 = 200.$$