Supplerende MASO-opgaver

Opgave 1. (Vinteren 1990–91, opgave 1)
a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

er divergent.
b) Vis, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$$

er konvergent.

Opgave 2. (Vinteren 1990–91, opgave 2)
Gør rede for at ligningssystemet

$$e^u - u^2 + v - x^2 - y^2 = 1$$
$$u^3 - u + v^2 - xy \sin u = 1$$

i en omegn af punktet $(x, y, u, v) = (1, 0, 0, 1)$ fastlægger u og v som C^∞-funktioner $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$ af x og y.
Beregn funktionalmatricen Dg i punktet $(1, 0)$, hvor $g = \binom{g_1}{g_2}$.

Opgave 3. (Vinteren 1990–91, opgave 3)
Betragt afbildningen $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$F(x, y) = (e^{-2y} + x(1 + y),\ 2e^{xy} - 3y)\,.$$

Gør rede for, at der findes en åben omegn U omkring punktet $(2, 0)$, således at F afbilder U injektivt på en åben omegn $V = F(U)$ omkringe $F(2, 0)$, og således at den omvendte afbildning $G\colon F(U) \to U$ til restriktionen af F til U er en C^∞-afbildning.
Bestem funktionalmatricen DG i punktet $F(2, 0)$.

Opgave 4. (Vinteren 1990–91, opgave 8)
Betragt følgende lineære program:
(P) Maksimer $-2x_1 + x_2$ under hensyn til bibetingelserne

$$x_1 - x_2 - 6x_3 = -3$$
$$-7x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 5$$

og fortegnskravene $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

(a) Omform (P) til et kanonisk lineært program (Q).
(b) Find samtlige tilladte basisløsninger til (Q).
(c) Opskriv det duale program (P') til (P) og find en tilladt løsning til (P').
(d) Begrund, at (P) og (P') har optimale løsninger.
(e) Find en optimal løsning til (P).

Opgave 5. (Vinteren 1992–93, opgave 3)
Lad f_0, f_1, f_2 være reelle funktioner på $\mathbb{R}^3$, definerede ve

$$f_0(x, y, z) = y, \quad f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$
$$f_2(x, y, z) = x^2 - y - z\,.$$

a) Gør rede for, at f_0 har et globalt minimum under bibetingelserne $f_1 = 0$, $f_2 = 0$.
b) Bestem et punkt (x_0, y_0, z_0) hvori f_0 har globalt minimum under bibetingelserne $f_1 = 0$, $f_2 = 0$.

Opgave 6. (Vinteren 1992–93, opgave 6)
Vi betragter et lineært optimeringsprogram
(P) Minmier $C^t X$ under betingelsen

$$AX = B \quad \text{og} \quad X \geqslant 0\,,$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^t = (14 \quad 38 \quad 20)$$
$$C^t = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 2)$$

a) Find samtlige basisløsninger til (P).
b) Bestem de optimale basisløsninger.
c) Opskriv det duale problem og løs det.

Opgave 7. (Vinteren 1993–94, opgave 1)
Vis, at summen

$$s = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

er endelig og opfylder

$$-\ln\ln 2 \leqslant s \leqslant -\ln\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2}\,.$$

Opgave 8. (Vinteren 1993–94, opgave 2)
Det oplyses, at der findes to følger af naturlige tal, l_n og k_n, som opfylder:
$l_n \to \infty$ når $n \to \infty$, l_n voksende,
$k_n \to \infty$ når $n \to \infty$, k_n voksende
både l_n og k_n består af ulige tal samt

$$|\frac{k_n}{l_n} - \pi| \leqslant \frac{1}{l_n^2} \text{ for alle } n.$$

a) Find

$$\lim_{n\to\infty} \cos(k_n).$$

b) Find lim inf og lim sup af følgen

$$n \mapsto \cos n\ .$$

Vink: Husk at k_n er en delfølge af følgen

$$n \mapsto n\ .$$

Opgave 9. (Vinteren 1993–94, opgave 4)

a) Vis, at ligningen

$$ze^y + \cos(xz) = 1$$

fastlægger z som en funktion $z = g(x, y)$ i en omegn af punktet $(0, 0, 0)$.

b) Bestem

$$g'_x(0,0)\ , \quad g'_y(0,0)\ , \quad g''_x(0,0)\ .$$

Opgave 10. (Vinteren 1993–94, opgave 5)
Vi betragter afbildningen

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ,$$

givet ved

$$S(x_1, x_2) = (e^{x_1} - e^{x_2}\ ,\ x_1 + x_2)\ ,$$

defineret på hele $\mathbb{R}^2$ og med værdimængden hele $\mathbb{R}^2$.

a) Vis, at DS er regulær i alle punkter i $\mathbb{R}^2$.
b) Vis, at S er injektiv.

Opgave 11. (Vinteren 1994–95, opgave 1)
Lad følgen $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ være givet rekursivt ved

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ for } n \geqslant 2$$

med udgangselementerne $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

(i) Vis ved induktion efter n, at der for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gælder

$$a_n = \frac{2}{3}\left(1 - (-\frac{1}{2})^n\right)\ .$$

(ii) Vis at følgen a_n er konvergent og bestem grænseværdien.

(iii) Gør rede for at delfølgen $a_0, a_2, a_4, \ldots$ er strengt voksende og at delfølgen $a_1, a_3, a_5, \ldots$ er strengt aftagende.

Opgave 12. (Vinteren 1994–95, opgave 2)
Lad $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x_1| < x_2\}$.

Betragt transformationen f fra X til $\mathbb{R}^2$ bestemt ved at $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ hvor

$$(*) \qquad y_1 = \log\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) , \quad y_2 = \log\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) .$$

(i) Skitsér mængden $X \subseteq \mathbb{R}^2$.

(ii) Beregn transformationen f's Jacobi matrix og gør rede for at dens determinant er positiv i hele X.

(iii) Vis at transformationen f er enentydig (injektiv) og find den inverse transformation til f ved at løse ligningssystemet $(*)$ m.h.t. x_1 og x_2.

Opgave 13. (Vinteren 1994–95, opgave 3)
Lad $\mathbf{x} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{y} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{z} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Lad $A = \text{Aff}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

(i) Vis, at $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ er affint uafhængige.

(ii) Gør rede for, at man for alle $t \in \mathbb{R}$ kan skrive $(t, t, 1)$ som en affin kombination af $\mathbf{x}$ og $\mathbf{z}$.

(iii) Vis, at
$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a + b + c = 1\} .$$

(iv) Gør rede for, at A er en hyperplan i $\mathbb{R}^3$. Bestem $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $d \in \mathbb{R}$ så
$$A = H(\mathbf{w}, d) .$$

Opgave 14. (Vinteren 1994–95, opgave 4)

(i) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n\sqrt{n}}$ er divergent.

(ii) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2\sqrt{n}}$ er konvergent, og giv en (endelig) øvre grænse for dens sum. Svaret kræves begrundet.

Opgave 15. (Vinteren 1994–95, opgave 5)
Lad $X = Y = [0, \infty[$.

Betragt korrespondencen $F : X \to Y$ givet ved $F(x) = [x, x + 4]$ og funktionen $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ givet ved
$$f(x, y) = x - 4y + y^2 .$$

(i) Skitsér grafen for korrespondencen F.

(ii) Beregn værdifunktionen $V : X \to \mathbb{R}$ givet ved
$$V(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in F(x)\} .$$

(iii) Beregn korrespondencen

$$Y^*(x) = \{y \in F(x) \mid f(x,z) \leqslant f(x,y) \text{ for alle } z \in F(x)\}$$

og skitsér dens graf inde i F's.

(iv) Forklar ud fra skitserne for F og Y^*, at disse har lukket graf.

Opgave 16. (Vinteren 1994–95, opgave 6)
Betragt ligningssystemet

$$(*) \qquad \begin{cases} e^{-2u} + x(2+u) + y = 0 \\ 2e^{xu} + \cos(y+v) + 3v = 12 \,. \end{cases}$$

(i) Vis, at punktet $(x, y, u, v) = (1, -3, 0, 3)$ passer i begge ligninger.

(ii) Gør rede for, at $(*)$ fastlægger u og v som funktioner af x og y i en omegn af dette punkt.

(iii) Beregn u'_x, u'_y, v'_x og v'_y i dette punkt.

Opgave 17. (Vinteren 1994–95, opgave 7)
Lad $S \subseteq \mathbb{R}^n$ og lad $\complement S$ være S's komplementærmængde i $\mathbb{R}^n$, (så $\complement S$ er mængden af elementer i $\mathbb{R}^n$, der ikke er indeholdt i S).

(i) Antag, at $\mathbf{x}^0 \in \partial S$ (randen af S).
Vis, at der findes følger $(\mathbf{x}_k) \subseteq S$, $(\mathbf{y}_k) \subseteq \complement S$ således at $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^0$ og $\mathbf{y}_k \to \mathbf{x}^0$.
(Vink: Vælg for alle $k \in \mathbb{N}$ $\mathbf{x}_k$ og $\mathbf{y}_k$ i n-kuglen $B(\mathbf{x}^0, \frac{1}{k}) = K(\mathbf{x}^0, \frac{1}{k})$).

(ii) Antag, at $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er fælles grænseværdi for følgerne $(\mathbf{x}_k)$ og $(\mathbf{y}_k)$, hvor $(\mathbf{x}_k) \subseteq S$ og $(\mathbf{y}_k) \subseteq \complement S$. Vis, at $\mathbf{x} \in \partial S$.

Opgave 18. (Vinteren 1996–97, opgave 1)
a) Begrund for hver af nedenstående 3 rækker, at den er konvergent.

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln(2)\ln(3)\cdots\ln(n)}{n!}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2(n)}{2^n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}}) \sin(\dfrac{1}{n})$.

b) Find en majorant for summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^{\frac{1}{n}}) \sin(\dfrac{1}{n})$.

Opgave 19. (Vinteren 1996–97, opgave 2)
Find de komplekse løsninger til ligningerne

a) $z^2 + 10z + 41 = 0$.
b) $z^6 = -64$.

Løsningerne ønskes angivet eksakt og på formen $a + ib$.

Opgave 20. (Vinteren 1996–97, opgave 3)
Lad A være den delmængde af $\mathbb{R}^3$, der er bestemt ved

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 4x + y^2 \leqslant 0 \text{ og } z \geqslant 0 \text{ og } x + z \leqslant 4\} .$$

a) Tegn en skitse af A.
b) Begrund, at A er kompakt.

Opgave 21. (Vinteren 1996–97, opgave 4)
Lad funktionen $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2x_3 - x_4x_5x_6 \\ x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 - 4 \\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_4^2 + \frac{3}{2}x_5^2 + 2x_6^2 \end{pmatrix} .$$

a) Begrund, at ligningen $F(\boldsymbol{x}) = 0$ fastlægger en differentiabel funktion $G = (g_1, g_2, g_3)$ defineret på en omegn U af punktet $(1, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^3$ og med værdier i $\mathbb{R}^3$ således at $G(1, 1, 1) = (2, 1, 1)$ og

$$\forall\, (x_1, x_2, x_3) \in U : F(x_1, x_2, x_3, g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), g_3(x_1, x_2, x_3)) = 0 .$$

b) Bestem Jacobimatricen $G'(1, 1, 1)$.
c) Lad $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være givet som

$$h(y_1, y_2, y_3) = y_1 - y_2^2 - y_3^3 ,$$

og lad $k : U \to \mathbb{R}$ være givet ved $k = h \circ G$. Beregn den retningsafledede af k i punktet $(1, 1, 1)$ efter retningen $(1, -2, 0)$.

Opgave 22. (Vinteren 1996–97, opgave 5)

a) Minimer $f_0(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 + 2x_3$ under bibetingelserne

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 \leqslant 8 \text{ og } x_1 + x_2 \geqslant 1 \text{ og } x_1 - x_2 \geqslant 1 .$$

b) Vis, at funktionen $\sin((2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_2 + 2x_3)/25)$ har minimum i samme punkt som f_0 under de samme bibetingelser.

Opgave 23. (Vinteren 1996–97, opgave 6)

a) Lad C_1 og C_2 være de lukkede konvekse delmængder af $\mathbb{R}^2$, som er givet ved

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ og } x^2 - y^2 \geqslant 1\}\,.$$

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0 \text{ og } y^2 - x^2 \geqslant 1\}\,.$$

Find en hyperplan $H(\boldsymbol{u}, \alpha)$ som separerer C_1 og C_2.

b) Lad C_1 og C_2 være de åbne kugler i $\mathbb{R}^3$, givet ved

$$C_1 = K((-1, -1, 0), 1)$$

$$C_2 = K((0, 1, 2), 1)\,.$$

Begrund, at C_1 og C_2 er disjunkte og konvekse.
Find en separerende hyperplan $H(\boldsymbol{u}, \alpha)$ som opfylder

$$\sup\{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_1 \in C_1\} < \alpha < \inf\{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_2 \in C_2\}\,.$$

Opgave 24. (Vinteren 1996–97, opgave 7)

Der er givet et standard minimeringsproblem (P)

(P) Minimer $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} -6x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_4 &\geqslant 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &\geqslant 0 \\ 4x_1 - x_3 - 3x_4 &\geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

a) Opskriv det duale problem (P*).

b) Begrund, at (P) og (P*) begge har optimale løsninger.

c) Opskriv det til (P) hørende kanoniske minimeringsproblem.

d) Løs (P) og (P*).

Opgave 25. (Juli 1997, opgave 1)

a) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ er konvergent.

b) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^2}$ er konvergent med sum mindre eller lig $1/2$.

Opgave 26. (Juli 1997, opgave 2)
Find samtlige rødder i ligningen

$$z^5 - z^3 + z^2 - 1 = 0\,.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $a + ib$.

Opgave 27. (Juli 1997, opgave 3)

a) Lav en skitse af mængden M givet ved

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \wedge x + y + z \geqslant 1\}\,.$$

b) Begrund, at M er kompakt.

c) Vis, at $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er et indre punkt af M.

Opgave 28. (Juli 1997, opgave 4)
Mængderne A og B i $\mathbb{R}^3$ er givet ved

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leqslant 1\}$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z \leqslant -9\}$$

a) Begrund, at A og B er konvekse.

b) Vis, at A og B er disjunkte.

c) Find en separerende hyperplan H og angiv tilhørende åbne halvrum J_1 og J_2 således at

$$A \subseteq J_1 \text{ og } B \subseteq J_2\,.$$

Opgave 29. (Juli 1997, opgave 5)
Betragt minimeringsproblemet.

Minimer $3x^4 + 9y^4 - 6x^2y^2$ under bibetingelserne $x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ y^2 - 2y \leqslant 0$.

a) Vis, at problemet er konvekst.

b) Find den optimale løsning og angiv den tilhørende Kuhn–Tucker vektor.

Opgave 30. (Juli 1997, opgave 6)
Der er givet et lineært optimeringsproblem (P).

(P) Minimer $x_1 + 3x_2 + x_3$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &\geqslant 4 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &\geqslant 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqslant 4 \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0\,.$$

a) Opskriv det duale problem (P').

b) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem (Q).

c) Vis, at både (P) og (P') har optimale løsninger.

d) Løs (P) og (P').

Opgave 31. (Vinteren 1997–98, opgave 1)
a) Der er givet nedenstående 2 rækker med positive led

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)!2^n}{(n+3)!3^n}\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)n} \qquad .$$

Bevis, at begge rækker er konvergente.
b) Talfølgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er givet rekursivt ved

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_{n+1} &= x_n + \cos x_n \,. \end{aligned}$$

Som sædvanligt opfattes x_n som buemålet, dvs. enheden er radianer når $\cos x_n$ skal beregnes. Vis, at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en begrænset voksende talfølge. Begrund, at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent og bestem dens grænseværdi. *Vink*: En skitse af enhedscirklen, hvor buen med længde x_n er indtegnet, er en hjælp.

Opgave 32. (Vinteren 1997–98, opgave 2)
Løs ligningen

$$z^6 + 11z^4 + 22z^2 + 36 = 0\,.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $a + ib$.

Opgave 33. (Vinteren 1997–98, opgave 3)
Lad M være den delmængde af $\mathbb{R}^3$ der består af de punkter (x, y, z) som opfylder følgende uligheder.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y &\leqslant -4 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y - z^2 &\leqslant -5 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + z &\leqslant -3 \\ z &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

a) Lav en skitse af M's snit med planen $y = 2$.
b) Lav en skitse af M og begrund, at M er kompakt.
c) Begrund, at $(1, 2, 1)$ er et indre punkt i M.

Opgave 34. (Vinteren 1997–98, opgave 4)
Der er givet en funktion $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ ved $F(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ hvor

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_6) &= e^{x_3x_4} - x_1x_3 \\ f_2(x_1, \ldots, x_6) &= \sin(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) \\ f_3(x_1, \ldots, x_6) &= -x_1x_3 - x_2x_3 - x_1x_6 - x_2x_6 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_6 + x_5x_6\,. \end{aligned}$$

a) Lad k være et naturligt tal. Begrund, at funktionerne f_1, f_2, f_3 alle er af klasse C^k.
b) Vis, at $F(1,0,1,0,1,\pi) = (0,0,0)$ og begrund, at der findes en differentiabel afbildning G defineret på en omegn W af $(1,0,1)$ i $\mathbb{R}^3$ med værdier i $\mathbb{R}^3$ således at $G(1,0,1) = (0,1,\pi)$ og for alle $z \in W$ gælder $F(z, G(z)) = (0,0,0)$.
c) Beregn Jacobimatricen $J_G(1,0,1)$ for G i punktet $(1,0,1)$.

Lad $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $H(y_1, y_2, y_3) = (y_1 y_2, y_1 + y_2)$ og lad $K : W \to \mathbb{R}^2$ være givet som $K = H \circ G$.

d) Beregn Jacobimatricen $J_K(1,0,1)$ for K i punktet $(1,0,1)$.

Opgave 35. (Vinteren 1997–98, opgave 5)
Der er givet minimeringsproblemet

$$\min x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + z^2 \text{ u.b. } x \leqslant 0, \quad 1 \leqslant x + y + z, \quad z \leqslant 0.$$

a) Vis, at problemet kan omskrives til et konkavt maksimeringsproblem.
b) Løs problemet og find Kuhn–Tucker vektoren hørende til det konkave problem. Det skal af besvarelsen klart fremgå hvorledes løsningen er fundet.

Opgave 36. (Vinteren 1997–98, opgave 6)
Der er givet et lineært optimeringsproblem (P) Maksimer $2x_1 - 3x_2 + x_3$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

a) Opskriv det duale problem (P′).
b) Bevis, at (P) har en optimalløsning.
c) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.
d) Løs både (P) og (P′).

Opgave 37. (August 1998, opgave 1)

i) Lad a være et ikke negativt reelt tal. Der er givet 3 rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{n})^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n)a^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n!)a^n.$$

Find for hver række mængden af de reelle tal a for hvilke rækken er konvergent.

ii) Lad a_1 være et reelt tal større end 1. Definer successivt $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sqrt{a_n})$ for $n \geqslant 1$. Begrund, at $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en konvergent talfølge og bestem dens grænseværdi.

Opgave 38. (August 1998, opgave 2)
Løs ligningen

$$z^6 - 2z^5 + 3z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 8z + 4 = 0\,.$$

Løsningerne bedes angivet på formen $z = a + ib$.

Opgave 39. (August 1998, opgave 3)
Der er givet en delmængde M af $\mathbb{R}^3$ ved ulighederne

$$\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in M \Leftrightarrow y^2 - 2y + z^2 - 2z + 1 \leqslant 0 \text{ og } x^2 - 3x \leqslant 0\,.$$

i) Tegn en skitse af M.
ii) Begrund, at M er kompakt.
iii) Find et indre punkt i M og begrund ud fra definitionen af et indre punkt, at det valgte punkt er indre.

Opgave 40. (August 1998, opgave 4)
Der er givet en funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$F(x, y, u, v) = (\sin(u^2v^2 - x + y) + (1 + u)^4 - 1\,,\ e^{xyuv} - x^2)\,.$$

i) Begrund, at der findes en omegn W af $(1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$ og en differentiabel funktion G defineret på W med værdier i $\mathbb{R}^2$ således at for $G = (g_1, g_2)$ gælder

$$G(1, 1) = (g_1(1, 1)\,,\ g_2(1, 1)) = (0, 1) \text{ og}$$
$$\forall(x, y) \in W : F(x, y, g_1(x, y)\,,\ g_2(x, y)) = (0, 0)\,.$$

ii) Bestem Jacobimatricen for G i punktet $(1, 1)$.

Lad $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$H(s, t) = (\cos(s^2t^2) + \sin(t)\,,\ e^{s^2+t^2} + s)\,.$$

iii) Vis, at $H(0, 0) = (1, 1)$ og begrund, at funktionen $K = G \circ H$ er defineret og differentiabel på en omegn U af $(0, 0)$.
iv) Bestem Jacobimatricen for K i $(0, 0)$.

Opgave 41. (August 1998, opgave 5)
Der er givet et maksimeringsproblem

maksimer $\quad \ln(4 - x^4 - x^2y - y^2 - z^2)$

under bibetingelserne

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\,,\ x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0\,,\ z \geqslant 0\,,\ y + z \geqslant 1\,.$$

i) Opskriv den tilhørende Lagrangefunktion og begrund at den er konkav som funktion af (x, y, z).
ii) Løs problemet.

Opgave 42. (August 1998, opgave 6)
Der er givet et lineært standard maximeringsproblem (P) maksimer $7x_1+9x_2+13x_3$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\leqslant 2 \\ x_1+3x_2+x_3 &\leqslant 3 \\ 2x_1+\ \ x_2+x_3 &\leqslant 1\,. \end{aligned}$$

i) Opskriv det tilhørende duale problem (P').
ii) Begrund, at både (P) og (P') må have optimale løsninger.
iii) Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.
iv) Løs både (P) og (P').

Opgave 43. (Vinteren 1998–99, opgave 1)
a) Man betragter talfølgen

$$x_n = (1-a+e^{-an})\cos(an),$$

hvor a er et givet tal i intervallet $[0, 2\pi]$. Find $\liminf_{n\to\infty} x_n$ og $\limsup_{n\to\infty} x_n$ i tilfældene hvor a er et af tallene

$$0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{4},\ 1,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 2\pi.$$

For hvilke af disse værdier af a er talfølgen konvergent?
b) Undersøg, for hvilke værdier af $b \geqslant 0$ og $c \geqslant 0$, følgende rækker er konvergente:

(1) $$\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)b^n,$$

(2) $$\sum_{n\in\mathbb{N},\, n>c} \Big(\frac{1}{n-c} - \frac{1}{n+c}\Big).$$

Find summen af (1) i tilfælde af konvergens. Find summen af (2) i tilfældet $c = 2$.

Opgave 44. (Vinteren 1998–99, opgave 2)
a) Find samtlige løsninger til ligningen

$$z^4 = -16,$$

angivet på formen $a + ib$.
b) Vis, at et komplekst tal $z \neq 0$ har $|z| = 1$, hvis og kun hvis $\overline{z} = 1/z$.

Opgave 45. (Vinteren 1998–99, opgave 3)
Man betragter funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{for } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

1° Vis, at f er kontinuert og differentiabel i ethvert punkt $x \in \mathbb{R}$, men at f ikke tilhører $C^1(\mathbb{R})$.
2° Undersøg, om der findes et interval $I = [-\delta, \delta]$ med $\delta > 0$, så at f afbilder I *enentydigt* på $f(I)$.

Opgave 46. (Vinteren 1998–99, opgave 4)
Undersøg, hvilke af følgende mængder i $\mathbb{R}^2$ er kompakte:

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{y+1} \},$$
$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0,\ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{y+1} \},$$
$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y < 3,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{y+1} \}.$$

Skitsér de tre mængder.

Opgave 47. (Vinteren 1998–99, opgave 5)
Man betragter det ikke-lineære maksimeringsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Maksimér } & f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \\ \text{under bibet. } & x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ & 2x + y \geqslant 1. \end{aligned}$$

Problemet ønskes løst; herunder opskrives problemet på form som i Sydsæter II Afsnit 4.13, og der besvares følgende:

1° Find, hvilke punkter der opfylder Kuhn–Tucker's nødvendige betingelser.
2° Vis, at sådanne punkter tillige opfylder Kuhn–Tucker's tilstrækkelige betingelser.

Opgave 48. (Vinteren 1998–99, opgave 6)
Man betragter maksimeringsprogrammet:

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{aligned} \text{Maksimér } & x_1 - x_2 \\ \text{under bibet. } & -3x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ & x_1 - ax_2 \leqslant 1, \\ \text{med fortegnskravet } & x_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Her er a er en given, positiv konstant.

1° Skitsér mængden M af tilladte løsninger til (P), for hvert $a > 0$.
2° Opskriv det duale program (P′), og skitsér mængden M′ af tilladte løsninger til (P′), for hvert $a > 0$.
3° Angiv, for hver værdi af a, hvilket tilfælde af Hovedsætningens fire muligheder, der indtræffer. (Hovedsætningen er Sætning 6.1 i de udleverede noter af B. Fuglede om lineær optimering.)
4° Find samtlige løsninger til (P) og (P′) med angivelse af optimale værdier, i de tilfælde hvor problemerne har løsning.

Opgave 49. (August 1999, opgave 1)

1° For hvilke værdier af a er følgende række konvergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi + \sin(2n+\frac{1}{2})\pi}{n^a}.$$

2° For hvilke værdier af b er følgende række konvergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n^b}.$$

Opgave 50. (August 1999, opgave 2)

Find samtlige løsninger til ligningen

$$(z^2+2z+2)(z^3+3)=0,$$

angivet på formen $a+ib$.

Opgave 51. (August 1999, opgave 3)

Man betragter følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$:

$$M = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{z+1}\,\}.$$

1° Tegn en skitse af M.
2° Er M lukket?
3° Er M kompakt?

Opgave 52. (August 1999, opgave 4)

Der er givet en funktion $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ved

$$F(x_1,x_2)=(x_1^2x_2,\ x_1x_2^2).$$

1° Begrund, at der findes en omegn W af $(1,1)$ i $\mathbb{R}^2$ og en differentiabel funktion G defineret på W med værdier i $\mathbb{R}^2$ således at for $G=(g_1,g_2)$ gælder

$$G(1,1)=(g_1(1,1)\,,\ g_2(1,1))=(1,1)\ \text{ og}$$
$$\forall(x_1,x_2)\in W: F\circ G(x_1,x_2)=(x_1,x_2).$$

2° Bestem Jacobimatricerne for F og G i punktet $(1,1)$.

Lad $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ være givet ved

$$H(x_1,x_2)=(e^{x_1+x_2},\ \cos(x_1-x_2)).$$

3° Begrund, at funktionen $K=H\circ G$ er defineret og differentiabel på W.
4° Bestem Jacobimatricen for K i $(1,1)$.

Opgave 53. (August 1999, opgave 5)
Der er givet et maksimeringsproblem

$$\text{maksimer} \quad f(x, y) = \ln(5 - x^2 - xy - 2y^2)$$

under bibetingelserne

$$x + 2y \leqslant 1, \;\; x \geqslant 0, \;\; y \geqslant 0.$$

1° Opskriv den tilhørende Lagrangefunktion og begrund at den er konkav som funktion af (x, y).

2° Løs problemet.

Opgave 54. (August 1999, opgave 6)
Der er givet et lineært standard maximeringsproblem (P)

$$\text{maksimer} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 1 \\ x_2 + x_3 &\leqslant 2 \\ x_1 + x_3 &\leqslant 3 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1° Opskriv det tilhørende duale problem (P′).

2° Begrund, at både (P) og (P′) må have optimale løsninger.

3° Opskriv det til (P) hørende kanoniske problem.

4° Løs både (P) og (P′).

Opgave 55. (December 1999, opgave 1)
(a) Bestem mængden A af reelle tal $a \geqslant 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a^n/n^2$ er konvergent, samtidig med at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a^n/n$ er divergent.

(b) Bestem mængden B af reelle tal $b \geqslant 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} nb^n$ er konvergent, samtidig med at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n b^n$ er divergent.

(c) Lad (x_n) og (y_n) være to følger af positive reelle tal, og betragt mængden C af reelle tal $c \geqslant 0$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n c^n$ er konvergent, samtidig med at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} y_n c^n$ er divergent. Begrund, at C er et interval (eventuelt tomt), altså at der for alle $c_1, c_2 \in C$ og $c \in \mathbb{R}$ med $c_1 \leqslant c \leqslant c_2$ gælder $c \in C$.

Opgave 56. (December 1999, opgave 2)
(a) Løs ligningen $z^3 - 2z + 4 = 0$ i $\mathbb{C}$. Angiv summen og produktet af løsningerne.

(b) Bestem en polynomiumsligning i $\mathbb{C}$ af lavest mulig grad, med reelle koefficienter og med 1, $2 + i$ og $1 + 2i$ som løsninger. Afgør, om $1 + i$ er løsning til denne ligning.

Opgave 57. (December 1999, opgave 3)
Lad der være givet en følge $g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots$ af kontinuerte funktioner $g_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Betragt mængden

$$W := \{\, x \in \mathbb{R} \mid g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \cdots \leqslant g_m(x) \leqslant \cdots \,\}.$$

(a) Bevis, at der for enhver konvergent talfølge (x_n) med alle $x_n \in W$ gælder, at også grænseværdien tilhører W.

(b) Begrund, at W er lukket.

Opgave 58. (December 1999, opgave 4)
Betragt funktionen $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) := x^3 - 3x - y$ for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ samt niveaukurven $N_2 := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 2 \,\}$ svarende til niveauet 2.

Lad M_2 betegne mængden af punkter $(a, b) \in N_2$, så niveaukurven N_2 i et passende åbent rektangel om (a, b) definerer x som en C^1–funktion ψ af y.

(a) Skitsér N_2. Begrund, at punktet $(-1, 0)$ tilhører N_2, men ikke M_2.

(b) Bestem mængden M_2.

(c) Bestem $\psi'(b)$ for ethvert $(a, b) \in M_2$.

Opgave 59. (December 1999, opgave 5)
Betragt mængden

$$S := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y \leqslant 1 \text{ og } -1 \leqslant y \leqslant 0 \,\}.$$

(a) Skitsér mængden S. Begrund, at den er lukket, og at den er kompakt.

(b) Afgør for ethvert $(x, y) \in S$, om **FB** (dvs. FøringsBetingelsen [Sydsæter II, s. 210]) for ulighederne $x^2 - y \leqslant 1$, $y \leqslant 0$ og $-y \leqslant 1$ er opfyldt i (x, y).

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er funktionen $f_a \colon S \to \mathbb{R}$ givet ved $f_a(x, y) := x^2 + ay^2$ for $(x, y) \in S$, og man betragter det ikke-lineære problem:

Maksimér $f_a(x, y)$ *når* $(x, y) \in S$.

(c)&(d) Afgør for ethvert $a \in \mathbb{R}$ samt for ethvert $(x, y) \in S$, hvori **FB** er opfyldt, om (x, y) er et muligt maksimumspunkt for f_a ifølge **KTNB** (dvs. Kuhn–Tuckers Nødvendige Betingelser [Sydsæter II, s. 210]).

(e) Begrund for ethvert $a \in \mathbb{R}$, at f_a har et maksimumspunkt i S, og angiv dette og maksimumsværdien.

Opgave 60. (December 1999, opgave 6)
Betragt det generelle lineære program:
(P) *Maksimér* $3x_1 + 5x_2$
under bibetingelserne $x_1 + x_2 \leqslant 1$, $2x_1 + 2x_2 \leqslant 1$, $x_1 + 2x_2 \leqslant 0$, $-x_1 - x_2 \leqslant 0$
og ingen fortegnskrav.

(a) Opstil det duale program (P'). Begrund, at det er på kanonisk form.

(b) Afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P').

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til det duale program (P').

(d) Løs det duale program (P').

(e) Løs det oprindelige program (P).

Opgave 61. (Juli 2000, opgave 1)
(a) Bestem mængden A af $a \in \mathbb{R}$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n(a^2 + \frac{3}{4})^n$ er konvergent.

(b) Bestem mængden B af $b \in \mathbb{R}$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(b^2 + \frac{3}{4})^n$ er konvergent.

(c) Bestem mængden D af $(k, c) \in \mathbb{R}^2$, så rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^k(c^2 + \frac{3}{4})^n$ er konvergent.

Opgave 62. (Juli 2000, opgave 2)
(a) Bestem en polynomiumsligning i $\mathbb{C}$ af lavest mulig grad, med reelle koefficienter og med $i\sqrt{2}$, $1 + i$ og $-1 + i$ som løsninger. Afgør, om $-i\sqrt{2}$ er løsning til denne ligning.

Lad nu g være en reel konstant.

(b) Løs ligningen $z^3 + gz^2 + g^2z + g^3 = 0$ i $\mathbb{C}$, og angiv løsningerne på formen $\alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Løs ligningen $z^6 + g^2z^4 + g^4z^2 + g^6 = 0$ i $\mathbb{C}$, og angiv løsningerne på formen $\alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Opgave 63. (Juli 2000, opgave 3)
Betragt kurven

$$N := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y^2 + y^4 = 0 \},$$

og lad M betegne mængden af punkter $(a, b) \in N$, så N i et passende åbent rektangel om (a, b) definerer y som en C^1–funktion φ af x.

(a) Skitsér N, og begrund, at punktet $(0, 0)$ ikke tilhører M.

(b) Bestem mængden M.

(c) Bestem $\varphi'(a)$ for ethvert $(a, b) \in M$.

Opgave 64. (Juli 2000, opgave 4)
Betragt mængden

$$S := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y \leqslant x + 2 \leqslant 2 \text{ og } y^2 \leqslant 1 + x \}.$$

(a) Skitsér mængden S. Begrund, at den er lukket, og at den er kompakt.

Betragt ulighederne $x \leqslant 0$, $-x + 2y \leqslant 2$ og $-x + y^2 \leqslant 1$.

(b) Afgør for ethvert $(x, y) \in S$, om **FB** (dvs. FøringsBetingelsen [Sydsæter II, s. 210]) for disse uligheder er opfyldt i (x, y).

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er funktionen $f_a\colon\ S \longrightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f_a(x,y) := ax^2 + y^4$ for $(x,y) \in S$, og man betragter det ikke-lineære problem:

$$\textit{Maksimér}\ \ f_a(x,y)\ \textit{når}\ (x,y) \in S.$$

(c) Afgør for ethvert $a \in \mathbb{R}$ samt for ethvert $(x,y) \in S$ med $x = y^2 - 1 < 0$, om (x,y) er et muligt maksimumspunkt for f_a ifølge **KTNB** (dvs. Kuhn–Tuckers Nødvendige Betingelser [Sydsæter II, s. 210]).

(d)&(e) Afgør for ethvert $a \in \mathbb{R}$ samt for ethvert $(x,y) \in S$, hvori **FB** er opfyldt, om (x,y) er et muligt maksimumspunkt for f_a ifølge **KTNB**.

(f) Begrund for ethvert $a \in \mathbb{R}$, at f_a har et maksimumspunkt i S, og angiv ethvert af disse og maksimumsværdien.

Opgave 65. (Juli 2000, opgave 5)
Betragt det generelle lineære program:
(P) *Maksimér* $\quad -x_1 + x_2$
under bibetingelserne $\quad x_1 + x_2 \leqslant 1,\ 3x_2 \leqslant -1,\ -x_1 - x_2 \leqslant 1$
og fortegnskravet $x_1 \geqslant 0$.

(a) Opstil det duale program (P'), og afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P').

(b) Omform (P') til et program (Q) på kanonisk form.

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til programmet (Q), og løs dette.

(d) Løs det duale program (P').

(e) Løs det oprindelige program (P).

Opgave 66. (November 2000, opgave 1)
(a) Betragt funktionerne $\varphi, f\colon\ [\,1,\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ givet ved henholdsvis $\varphi(x) = (1 + x\ln x)^{-1}$ og $f(x) = (1 + x\ln x)^{-2}(1 + \ln x)$. Bestem de afledede funktioner φ' og f'.

(b) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + n\ln n)^{-2}(1 + \ln n)$ er konvergent.

(c) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(1 + n\ln n)^{-2}\ln(n^2)$ er konvergent.

Opgave 67. (November 2000, opgave 2)
(a) Løs ligningen $z^2 + z + 1 = 0$ i $\mathbb{C}$, bestem summen og produktet af løsningerne, og udregn z^3 for enhver løsning.

(b) Løs ligningen $z^6 = 1$ i $\mathbb{C}$, angiv løsningerne på formen $\alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, og bestem summen og produktet af løsningerne.

Opgave 68. (November 2000, opgave 3)
Betragt mængden

$$W := \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1 \quad \text{og} \quad e^{x-1} - 1 \leqslant y \leqslant 2\ln x\,\}.$$

(a) Antag, at (x_k, y_k) er en konvergent punktfølge i $\mathbb{R}^2$ med grænsepunkt (a,b), og antag, at $(x_k, y_k) \in W$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Begrund, at (a,b) tilhører W.

(b) Begrund, at der findes $r \in \mathbb{R}$, så $2\ln x < e^{x-1} - 1$ for $x > r$. Begrund, at W er kompakt.

Opgave 69. (November 2000, opgave 4)
Betragt kurven
$$N := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 + x^3 = 0 \}.$$
Lad L betegne mængden af punkter $(a, b) \in N$, så N i et passende åbent rektangel om (a, b) definerer y som en C^1–funktion φ af x, og lad M betegne mængden af punkter $(a, b) \in N$, så N i et passende åbent rektangel om (a, b) definerer x som en C^1–funktion ψ af y.

(a) Skitsér N, og begrund, at punktet $(0, 0)$ hverken tilhører L eller M.

(b) Bestem mængderne L og M. Angiv $\varphi(a)$ og bestem $\varphi'(a)$ for ethvert $(a, b) \in L$. Angiv $\psi'(b)$ for ethvert $(a, b) \in M$.

(c) Bestem et størst muligt åbent rektangel $W = A \times B$ om $(1, \sqrt{2})$, så der findes C^1–funktion $\alpha\colon A \to B$ med $N \cap W = \{ \big(x, \alpha(x)\big) \mid x \in A \}$. Bestem et eksplicit udtryk for $\alpha(x)$, og udregn $\alpha'(x)$ for alle $x \in A$.

Opgave 70. (November 2000, opgave 5)
Betragt mængden
$$S := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^3 \leqslant y \quad \text{og} \quad x^3 \leqslant y \leqslant 1 \},$$
funktionerne $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ givet ved henholdsvis
$$f_1(x, y) := x^2 - 2y, \quad f_2(x, y) := -x^2 - 2y \quad \text{og} \quad f_3(x, y) := 6x^2 - 2y$$
samt de tre optimeringsopgaver:

(P_1)	*Maksimér* $f_1(x, y)$ *når* $(x, y) \in S$;
(P_2)	*Maksimér* $f_2(x, y)$ *når* $(x, y) \in S$;
(P_3)	*Maksimér* $f_3(x, y)$ *når* $(x, y) \in S$.

(a) Skitsér mængden S. Begrund, at den er kompakt.

(b) Formulér problemerne (P_1), (P_2) og (P_3) ovenfor som Kuhn–Tucker problemer. Afgør for ethvert $(x, y) \in S$, om FøringsBetingelsen $\underline{\underline{\text{FB}}}$ er opfyldt i (x, y).

(c) Løs problemet (P_1).

(d) Løs problemet (P_2).

(e) Løs problemet (P_3).

Opgave 71. (November 2000, opgave 6)
Betragt det generelle lineære program:
(P) *Maksimér* $x_1 - 2x_2 - 5x_3$
under bibetingelserne $x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 1, -x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$
og fortegnskravene $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$.

(a) Omform (P) til et program (Q) på kanonisk form.

(b) Opstil det duale program (P'), og afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P').

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til programmet (Q), og løs dette.

(d) Løs det oprindelige program (P).

(e) Løs det duale program (P').

Opgave 72. (december 2001, opgave 1)
I denne opgave betragtes talfølgen (x_n) bestemt ved

$$x_n = \frac{\ln(n^2+n)}{\ln(n^2)+n}\,.$$

(1) Begrund, at der for alle $n \geqslant 2$ gælder følgende uligheder:

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{3\,\ln n}{n}\,.$$

(2) Begrund, at $x_n \to 0$ for $n \to \infty$.

(3) Begrund, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ er divergent.

(4) Begrund, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ er konvergent.

Opgave 73. (december 2001, opgave 2)
(1) Bestem de komplekse løsninger z til ligningen

$$(z-i)^4 + 4 = 0.$$

Løsningerne ønskes angivet på formen $z = x + iy$, med eksakte værdier af x og y.

(2) Angiv produktet af løsningerne.

Opgave 74. (december 2001, opgave 3)
For hver given værdi af tallet a bestemmes en delmængde S_a af $\mathbb{R}^2$:

$$S_a := \{(x,y) \mid y^2 \leqslant x \leqslant 1 + ay^2\}.$$

(1) Skitser S_a for nogle forskellige værdier af a. Skitserne skal illustrere, hvordan formen på S_a ændrer sig med a.

(2) Angiv de værdier af a, for hvilke S_a er konveks.

(3) Angiv de værdier af a, for hvilke S_a er en afsluttet (også kaldet lukket) delmængde af $\mathbb{R}^2$.

(4) Angiv de værdier af a, for hvilke S_a er kompakt.

Opgave 75. (december 2001, opgave 4)
Punktet $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ opfylder ligningen

$$(*) \qquad x^3 + y^3 + z^3 - xyz - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4}y = 1\,.$$

(1) Begrund, at ligningen nær punktet bestemmer z som en (differentiabel) funktion $z = g(x, y)$, altså at der findes en funktion $g(x, y)$ defineret i et rektangel R omkring $(0, 0)$, bestemt ved uligheder,

$$R: \qquad |x| \leqslant \delta,\ |y| \leqslant \delta,$$

og et positivt tal ε således, at der for hvert $(x, y) \in R$ findes et og kun et tal z, så $|z - 1| \leqslant \varepsilon$ og ligningen (*) gælder, nemlig $z = g(x, y)$.

(2) Det kan vises, at man i (1) kan tage $\varepsilon = \delta = \frac{1}{2}$. Dette må antages i resten af besvarelsen, og kræves ikke eftervist. Begrund, at funktionen $\varphi(t) = g\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t\right)$ er en differentiabel funktion, defineret for $|t| < 1$, og bestem differentialkvotienten $\varphi'(0)$ svarende til $t = 0$.

Opgave 76. (december 2001, opgave 5)
Betragt følgende lineære program på standardform:
(P) Maksimer $3x_1 - x_2 - 6x_3 - 5x_4$ under hensyn til bibetingelserne,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &\leqslant 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &\leqslant 1, \end{aligned}$$

og med alle fire variable $x_j \geqslant 0$.

(1) Opstil det duale program (P').

(2) Skitser mængden af tilladte løsninger til (P').

(3) Løs det duale program (P').

(4) Opskriv de ligninger, der ifølge Sætning 4.7 [F, side 4.5] må gælde for koordinaterne til en optimal løsning $\mathbf{x}$ til (P).

(5) Løs problemet (P).