

Ugeseddel 1.

Velkommen til kurset Matematisk Analyse og Statisk Optimering, også kaldet MASO. Kurset har en hjemmeside:

<http://www.math.ku.dk/~thorup/h2/maso.htm>

Her kan du finde oplysninger om kurset, om lærebøger og undervisningsplaner. Den vigtigste oplysning er måske, at den første forelæsning begynder mandag den 2. september kl 9.50. Her indleder jeg med at fortælle lidt om kurset, og jeg udlever kopier af de første sider af noterne. Jeg hedder i øvrigt Anders Thorup, og jeg kan træffes på H. C. Ørsted Institutet (lokale E209), tlf 3532 0749, e-mail: <thorup@math.ku.dk>, — eller privat, tlf 44653153.

Undervisningsmateriale. Der er dels to notesæt:

[GG] Grubb & Gutmann Madsen: Talfølger, rækker og komplekse tal,

[F] Fuglede: Lineær optimering.

De er samlet som én bog: Fuglede, Grubb og Gutmann Madsen: Analyse og optimering, Matematisk Afdeling 1999. Den forventes til salg i Boghandelen fra den 2. september.

Hertil kommer lærebogen:

[S] Sydsæter, Matematisk analyse, bind II, 3. udgave, Universitetsforlaget 1990.

Program. Den 1. uge, 2/9–6/9, har overskriften „Tal og talfølger“, med undervisningsmaterialet fra [GG, §1, §2]. Af teksten overspringes ind til videre de dele, der handler om *punktfølger* (dvs følger i $\mathbb{R}^k$ for $k > 1$), specielt s. 7^{11-13} , s. 9^3 , og s. 10^{9-21} . Videre overspringes *Størrelsesorden* s. 13–14, og *Talfølger i $\mathbb{R}^*$* s. 14–15. Kontinuitet (s. 7 nederst) omtales næste uge. Der er ingen øvelser i ugen.

Kuglerne. På ugesedlerne gives, markeret med en kugle, en ultrakort beskrivelse af nogle af de begreber, der omtales i ugen.

- **Supremumsegenskaben** (Kontinuitetsaksiomet) [GG, s. 3]: Enhver ikke-tom, opad begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$ har et mindste overtal. Dette tal kaldes *supremum for A* , og betegnes $\sup A$. Det er smart at definere $\sup A := \infty$, når A ikke er opad begrænset, og for den tomme mængde, $\emptyset$, sættes $\sup \emptyset := -\infty$.

- **Infimumsegenskaben:** Enhver ikke-tom, nedad begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$ har et største undertal. Dette tal kaldes *infimum for A* og betegnes $\inf A$. Sæt $\inf A := -\infty$, når A ikke er nedad begrænset, og $\inf \emptyset := \infty$.

- **Achilleusfølgen** er den reelle talfølge $(a_n) = 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots$, altså $a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Der gælder $a_n \rightarrow 2$ for $n \rightarrow \infty$. Med $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gælder $\sup A = 2 \notin A$ og $\inf A = 1 \in A$.

- **De vigtigste funktioner** [Sydsæter I, s. 190–198].

Eksponentialfunktionen, $\exp$, givet ved $x \mapsto \exp(x) = e^x$; afbilder $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Den naturlige logaritme, $\log = \ln$, givet ved $x \mapsto \log x = \ln x$; afbilder $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Potensfunktion med eksponent $k \in \mathbb{R}$, givet ved $x \mapsto x^k = \exp(k \ln x)$; afbilder $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Eksponentialfunktion med grundtal $a \in \mathbb{R}_+$, givet ved $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a)$; afbilder $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- *Hvem vinder?* [GG, s. 11]. *Eksponentiel vækst vinder over polynomiel vækst, og polynomiel vækst vinder over logaritmisk vækst:*

$$\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0, \text{ når } k > 0 \text{ og } a > 1; \quad \text{og} \quad \frac{\ln n}{n^k} \rightarrow 0, \text{ når } k > 0.$$

- *Grænseværdi.* For reel talfølge (x_n) og reelt tal a gælder $x_n \rightarrow a$, netop når der for ethvert $\varepsilon > 0$ kun er *endelig mange* x_n uden for intervallet $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Planen. I næste uge, 9/9-13/9, er emnerne følger og rækker, fra [GG, §2, §3]. Ved øvelserne regnes de følgende opgaver:

Opgave 1. Forbered en tavlegennemgang af *første del* af Eks. 2.11 [GG, s. 11].

Opgave 2. Forbered en tavlegennemgang af *anden del* af Eks. 2.11 [GG, s. 12]. Resultatet har betydning i rentesregning: En kapital på 1 kr. anbringes til forrentning med rente og renters rente i et tidsrum af m år og vokser derved til K kr. Rentefoden omsat til årsbasis kaldes r , altså 100 r % p.a. Vi antager, at der går n terminer på et år (f.eks. $n = 4$). Hver termin er således $1/n$ år, og rentefoden pr. termin er r/n . Det samlede antal terminer på de m år, forrentningen varer, er mn . Slutkapitalen er derfor $K = (1 + \frac{r}{n})^{mn}$.

Udregn for $r = 0,08$ kapitalen K efter 1 år i hvert af tilfældene:

- (1) $n = 2$ (halvårlig rentetilskrivning) (2) $n = 4$ (kvartårlig rentetilskrivning)
 (3) $n = 12$ (månedlig rentetilskrivning) (4) $n \rightarrow \infty$ (kontinuert rentetilskrivning).

Vedr. (4) benyttes omskrivningen $(1 + \frac{r}{n})^{mn} = [(1 + \frac{r}{n})^n]^m$, og K defineres som grænseværdien heraf for $n \rightarrow \infty$. Hvad er i øvrigt forklaringen på, at K bliver større, når terminerne bliver kortere (og derfor størst ved kontinuert rentetilskrivning)?

Opgave 3. Begrund, at $\inf A \leq \sup A$, hvis $A \neq \emptyset$.

Opgave 4. Læs om *delfølge* i [GG, s. 18]. Hvilke af nedenstående talfølger er delfølger af følgen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$?

- (a): $\frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \dots$, (b): $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$, (c): $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots$.

Opgave 5. Angiv to konvergente delfølger af følgen (2.6) i [GG, s. 6] således, at den ene går mod 0 og den anden mod 1. Findes der en, der går mod $\frac{1}{2}$?

Parlør.

- | | |
|---|---|
| $\forall$ = for alle ("for alle"); | $\exists$ = der findes ("der eksisterer"); |
| $\cap$ = fælles med; $\wedge$ = og; | $\cup$ = forenet med; $\vee$ = eller; |
| $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (naturlige tal); | $\in$ = er element i, tilhører; |
| $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (hele tal); | $\notin$ = er ikke element i, tilhører ikke; |
| $\mathbb{Q} = \{\frac{t}{n} \mid t \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ (rationale tal); | $\mathbb{R}$ = mængden af reelle tal; |
| $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (naturlige tal og nul); | $\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$ (positive reelle tal); |
| $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (udvidede reelle tal); | |
| $\emptyset$ = den tomme mængde (ingen elementer); | $\mapsto$ = bliver sendt over i; |
| $\exp$ = den naturlige eksponentialfunktion; | $\subseteq$ = er delmængde af (evt lig med); |
| $\log = \ln$ = den naturlige logaritmefunktion; | $\subset$ = er delmængde af og ikke lig med. |

Anders Thorup