

Ugeseddel 2.

Program. I den 2. uge, 9/9-13/9, er emnerne følger og rækker, fra [GG, §2, §3], dvs §2 og §3 fra den første del af notesamlingen. Ved øvelserne, mandag eller onsdag, regnes opgaverne U1: 1, 2, 3, 4, 5 (det er opgaverne fra ugeseddel 1).

Kuglerne.

- Om exp og ln. Funktionerne er hinandens inverse (omvendte) funktioner:

$$\exp(\ln y) = y \quad [\text{altså } e^{\ln y} = y]; \quad \ln(\exp x) = x, \quad [\text{altså } \ln e^x = x].$$

Videre gælder reglerne:

$$e^{x+x'} = e^x e^{x'}, \quad e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e, \\ \ln(yy') = \ln y + \ln y', \quad \ln(y^n) = n \ln y, \quad \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1.$$

(I formlerne er $x, x' \in \mathbb{R}$ og $y, y' \in \mathbb{R}_+$; de to formler, der indeholder n følger af de øvrige, hvis $n \in \mathbb{Z}$, men de gælder faktisk for alle reelle tal n .)

- Om potenser. Lad a være et positivt reelt tal. Som bekendt defineres potensen a^n , når eksponenten n er et naturligt tal, som produktet $a \cdot a \cdots a$, med n faktorer. For eksponent 0 sættes $a^0 := 1$, og det er bekvemt for $n \in \mathbb{N}$ at definere $a^{-n} := 1/a^n$. Hermed er a^n defineret, når $n \in \mathbb{Z}$.

For et vilkårligt reelt tal x som eksponent defineres a^x som $a^x := e^{x \ln a}$. Det følger af egenskaber ved eksponentialfunktion og logaritme, at denne definition, når x er et helt tal, stemmer overens med den allerede givne.

For regning med potenser gælder *potensreglerne*:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{xy} = (a^x)^y, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Videre gælder:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad \ln(a^x) = x \ln a.$$

Af potensreglerne følger nemlig, at $a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$; derfor er a^{-x} det reciprokke af a^x , altså $a^{-x} = 1/a^x$. Videre er $(a^{1/n})^n = a^{n \cdot 1/n} = a^1 = a$; altså er $a^{1/n}$ en n 'te rod af a , dvs $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Endelig følger den sidste ligning af egenskaber ved funktionerne exp og ln.

- De afledede af standardfunktionerne, [Sydsæter I, s. 190–198] og U 1:

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = 1/x, \quad (x^k)' = kx^{k-1}.$$

Funktionen $a^x = e^{x \ln a}$ er sammensat, $a^x = e^u$ med $u = x \ln a$, og det giver differentialkvotienten: $(a^x)' = a^x \ln a$.

- Konvergente følger er begrænsede, [GG, s. 7].

- *Regneregler* [GG, s. 9]: For konvergente talfølger, $x_n \rightarrow a$ og $y_n \rightarrow b$, gælder:

$$x_n + y_n \rightarrow a + b, \quad x_n - y_n \rightarrow a - b, \quad x_n y_n \rightarrow ab, \quad x_n / y_n \rightarrow a / b;$$

det sidste under forudsætning af at $y_n \neq 0$ for alle n og at $b \neq 0$.

- *Divergente følger*, der går mod ∞ : Se Definition 2.13 [GG, s. 12]. For enhver følge (x_n) i $\mathbb{R}_+$ gælder, [GG, s. 13],

$$x_n \rightarrow \infty \iff 1/x_n \rightarrow 0.$$

- *Et trick*: Betragt Fibonacci's følge (F_n) [GG, s. 6] (x_n) , altså 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... og de successive kvotienter: $x_n := F_{n+1}/F_n$, altså følgen,

$$(x_n): \quad 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, \dots$$

Antag, at følgen x_n er konvergent, $x_n \rightarrow a$. Så kan grænseværdien a bestemmes: For Fibonacci's følge gælder rekursionsformlen $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Altså er

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}.$$

For $n \rightarrow \infty$ går venstresiden mod a og højresiden går, ifølge regnereglerne, mod $1 + 1/a$. Altså er $a = 1 + 1/a$, og løsning af denne ligning giver $a = (1 + \sqrt{5})/2$. Det er et tilsvarende trick der bruges i [GG, Eksempel 2.22]. Grænseværdien a hedder i øvrigt *det gyldne snit*.

Bemærk, at ligningen $x_n = 1 + 1/x_{n-1}$ er en rekursionsformel for følgen x_n . Med $x_1 = 1$ fås:

$$x_2 = 1 + \frac{1}{1}, \quad x_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, \quad x_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, \quad x_5 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}.$$

Kan du se systemet?

Planen for den tredje uge, 16/9–20/9, er at fortsætte med uendelige rækker og det almindelige konvergensprincip, [GG, §3, §4]. Ved ugens øvelser diskuteres emner fra de sidste forelæsninger. Opgaver fra [GG]: 2.3, 2.6, 3.1, 3.2, 3.6 (opgaverne fra [GG] er samlet på siderne 48ff). Markeringen af øvelse 2.3 betyder, at den er beregnet til skriftlig aflevering.

Anders Thorup