

Ugeseddel 3.

Program. I den 3. uge, 16/9–20/9, behandles uendelige rækker (afsluttes) og det almindelige konvergensprincip, [GG, §3, §4]. Ved ugens øvelser diskuteres emner fra de sidste forelæsninger. Opgaver er GG: 2.3, 2.6, 3.1, 3.2, 3.6 (opgaverne fra [GG] er samlet på siderne 48ff). Markeringen af øvelse 2.3 betyder, at den er beregnet til skriftlig aflevering.

Parlør.

for $n \gg 0$ = for alle n fra et vist trin.

Kuglerne.

- *Kontinuitet* er defineret i [Sydsæter I, s. 206–208]. Regning med kontinuerte funktioner giver kontinuerte funktioner, og *standardfunktionerne* fra U1 er kontinuerte, hvor de er defineret. Hvis $f(x)$ er kontinuert, og $x_n \rightarrow a$, så vil $f(x_n) \rightarrow f(a)$ [forudsat, at a og alle x_n tilhører definitionsområdet for f].

- *Voksende følger konvergerer*, hvis de er begrænsede: Er $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$, og er (x_n) opad begrænset, da vil x_n konvergere mod $\sup(x_n)$. Ellers er $\sup(x_n) = \infty$, og (x_n) divergerer mod ∞ .

- *Uendelig række.* For en given talfølge (a_n) giver den uendelige sum,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad (+)$$

ikke umiddelbart mening. Men man kan betragte de endelige summer, kaldet *afsnit*, $s_1 := a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, og, i almindelighed,

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Notationen (+) bruges i *to betydninger*. I den ene betegner det et *problem*: Er afsnitsfølgen s_n en konvergent talfølge; er svaret ja, siges rækken at være *konvergent*, og grænseværdien kaldes rækkens *sum*. I den anden betydning er det et tal, nemlig summen, *hvis* rækken er konvergent. Forvirrende? Ja!

Bemærk, at *index* i er et tilfældigt valg. Vi kan lige så godt skrive $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eller $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- *Nødvendig betingelse*, [GG, s. 21]: Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så vil $a_n \rightarrow 0$.

- *Kvotientrækken* $a + aq + aq^2 + \dots$ er konvergent, når $|q| < 1$, altså for $-1 < q < 1$, med summen $a/(1 - q)$. Bemærk, at det n 'te led i rækken er aq^{n-1} . Det er derfor nærliggende at skrive rækken som $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i$, hvor *index* i begynder med $i = 0$.

- *Regneregler*, [GG, s. 23], for regning med uendelige rækker udtrykkes ofte i form af formler:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Formlen ser rimelig ud, ikke? Den betyder følgende: Hvis begge rækker på venstresiden er konvergente, så er også rækken på højresiden konvergent, og for summerne af de tre rækker gælder ligheden i formelen. Prøv tilsvarende med betydningen af følgende to formler:

$$c(a_1 + a_2 + \dots) = ca_1 + ca_2 + \dots,$$

$$\text{og } a_1 + a_2 + a_3 + \dots = (a_1 + \dots + a_N) + (a_{N+1} + a_{N+2} + \dots).$$

• *Rækker med positive led*, $a_n \geq 0$ for alle n , har voksende afsnitsfølge, $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots$. Hvis (s_n) er begrænset, er rækken konvergent med $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup(s_n)$. Ellers er (s_n) divergent, $s_n \rightarrow \infty$, og man skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

• *Sammenligningskriteriet*, [GG, s. 26, 28]. Antag, at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle n . Da er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$; specielt, hvis $\sum b_n$ er konvergent, så er $\sum a_n$ konvergent. Hvis bare $0 \leq a_n \leq K b_n$ for $n \gg 0$ (med en passende konstant $K > 0$), så gælder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

• *Størrelsesorden*. To følger (a_n) og (b_n) af positive tal har samme størrelsesorden, hvis der findes konstanter $K, L > 0$ således, at $a_n \leq K b_n$ og $b_n \leq L a_n$ for alle n . Ækvivalent betyder det, at $M \leq a_n/b_n \leq K$, med passende $K, M > 0$. Og det gælder specielt, hvis $0 < \lim a_n/b_n < \infty$. Hvis (a_n) og (b_n) har samme størrelsesorden, så gælder „ $\iff$ “ ovenfor, dvs rækken $\sum a_n$ er konvergent, hvis og kun hvis $\sum b_n$ er konvergent.

• *Decimalbrøker*, [GG, s. 27]. For enhver følge (a_n) af cifre, dvs $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, er decimalbrøken $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ defineret som summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\frac{1}{10})^n \in \mathbb{R}$.

• *Kvotientkriteriet*, [GG, s. 28]. Antag, at $a_n > 0$ for alle n . Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, hvis der findes et tal $q < 1$ så at $a_{n+1}/a_n < q$ for $n \gg 0$, og den er divergent, hvis $a_{n+1}/a_n \geq 1$ for $n \gg 0$. Hvis følgen a_{n+1}/a_n har en grænseværdi, q , så er rækken konvergent, hvis $q < 1$, og den er divergent, hvis $q > 1$; hvis $q = 1$ kan alt ske.

• *Rodkriteriet*, [GG, s. 29]. Antag, at $a_n \geq 0$ for alle n . Så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, hvis der findes $q < 1$ så $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ for $n \gg 0$, og den er divergent, hvis $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ for uendelig mange $n \in \mathbb{N}$. Hvis $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow q$, da er rækken konvergent, når $q < 1$, og den er divergent, når $q > 1$, mens tilfældet $q = 1$ kræver specialbehandling.

• *Integralkriteriet*, [GG, s. 29–30]. Antag, at $f(x)$, defineret for $1 \leq x < \infty$, er positiv, aftagende og kontinuert. Da er $F(x) := \int_1^x f(t) dt$ en voksende funktion, og der gælder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ er konvergent} \iff F(x) \text{ er begrænset.}$$

Eksempel, [GG, s. 27]. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ er konvergent for $p > 1$ og divergent for $p \leq 1$. Specielt er den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.

Planen for den fjerde uge, 23/9–27/9, er at introducere de komplekse tal, [GG, §5]. Måske når vi også lidt om talrummene $\mathbb{R}^n$. Ved øvelserne diskuteres emner fra forelæsningerne; opgaver er dels den første af de to nedenstående, dels opgaverne GG: 3.3, 3.4, 3.5.

Opgave 1. Betragt for $c \in \mathbb{R}$ funktionerne $f:]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ og $h:]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ givet ved hhv. $f(x) = \ln(\ln x)$, $g(x) = x^c$ og $h(x) = (\ln x)^c$. Bestem de afledede funktioner f' , g' og h' .

Opgave 2. (a) Vis, at rækken $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$ er konvergent med summen 0. (b) Rækkens led omordnes, så der summeres i følgende rækkefølge:

$$1, 2, \overbrace{3, 5}^2, 4, \overbrace{7, 9, 11, 13}^4, 6, \overbrace{15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29}^8, 8, \dots$$

Hvad er systemet? Vis, at den omordnede række er divergent, idet afsnitsfølgen går mod ∞ .

Anders Thorup