

Ugeseddel 4.

Program. I den 4. uge, 23/9–27/9, er emnet de komplekse tal, [GG, §5]. Ved øvelserne diskuteres emner fra forelæsningerne; opgaver er U3: 1 og GG: 3.3, 3.4, 3.5.

Kuglerne.

• *Potensrækker.* En række af formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, jfr [GG, s. 32], kaldes en *potensrække* (du behøver naturligvis ikke at kende navnet, men du skal vide, at rækker af denne form er interessante). Følgen (a_n) er en fast talfølge, og x er et reelt tal. Det interessante er at spørge, for forskellige værdier af x , om rækken konvergerer. Et nøgleresultat er følgende: Hvis rækken $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergerer for et tal $r > 0$, så er rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent for ethvert x i intervallet $]-r, r[$ med en sum, $f(x)$, der er en differentiabel funktion i intervallet. Den afledede $f'(x)$ er lig med summen af den potensrække der fås ved at differentiere ledvis. Tilsvarende kan man integrere ledvis, og få stamfunktionen $\int_0^x f(t) dt$. For eksempel, for $-1 < x < 1$ er

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{1-x} &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots, \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Den mellemste linie er formen for kvotientrækken, den øverste fås ved at integrere (chek det lige: $\ln(1-x)^{-1}$ har differentialkvotient $(1-x)^{-1}$) og den nederste fås ved at differentiere (check det lige: $(1-x)^{-1}$ har differentialkvotienten $(1-x)^{-2}$).

• *Taylor-polynomiet* af n 'te orden [Sydsæter I, s. 256], for en pæn funktion $f(x)$ omkring $a = 0$, er summen $s_{n+1}(x)$ af de første $n + 1$ led i potensrækken, kaldet *Taylorrækken*,

$$f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \cdots. \quad (*)$$

Taylor's formel [Sydsæter I, s. 258] siger, at *restleddet* $R_{n+1}(x) = f(x) - s_{n+1}(x)$ har formen

$$R_{n+1}(x) = f(x) - s_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)x^{n+1},$$

hvor $c = c_n$ er et tal mellem 0 og x . **Hvis restleddet går mod 0 for $n \rightarrow \infty$, er Taylorrækken (*) altså konvergent med summen $f(x)$.** For eksempel, jfr [Sydsæter I, s. 262, opgave 6], er

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots.$$

• *Det almindelige konvergensprincip* siger, at hvis en given talfølge (x_n) er en Cauchy-følge, dvs hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ gælder, at

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \text{ når } n, m \gg 0,$$

så er (x_n) en konvergent følge. I beviset indgår tallene,

$$y_p := \inf \{x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots\} = \inf_{n \geq p} x_n,$$

24. januar 2003

for $p = 1, 2, 3, \dots$. Det fordres, at man til eksamen kan begrunde, at y_p er et tal (dvs at infimum ovenfor ikke er $-\infty$), at følgen (y_p) er voksende (altså $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots$), og opad begrænset (dvs $y_p \leq M$ for alle p med et passende M), og at følgen (y_p) derfor er konvergent. For grænseværdien,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} y_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{n \geq p} x_n,$$

skriver en matematiker naturligvis blot $\liminf x_n$. Man skal vide, at dette tal også kaldes *limes inferior* for følgen (x_n) . Og man skal i alt dette kunne erstatte $\inf$ med $\sup$. Men så kræves der ikke mere fra [GG, §4]. Specielt kræves det ikke, at man kan *bevise*, at $\liminf x_n$, for en given Cauchy-følge (x_n) , faktisk er grænseværdien $\lim x_n$.

• *De komplekse tal* er, pr. definition, vektorerne (eller punkterne) i planen, hvor planen fx opfattes som $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. De reelle tal $\mathbb{R}$ sidder som førsteaksen i $\mathbb{C}$, idet $r \in \mathbb{R}$ identificeres med $(r, 0) \in \mathbb{C}$. Vi skriver altså $r = (r, 0)$, og specielt er $0 = (0, 0)$ og $1 = (1, 0)$.

Den *imaginære enhed* er $i := (0, 1)$. Som vektorer er $1 = (1, 0)$ og $i = (0, 1)$ en basis for planen $\mathbb{R}^2$. Hvert komplekst tal z kan altså entydigt skrives $z = x1 + yi$. Da $x1 = x$, har vi

$$z = x + yi = (x, y).$$

• *Addition og multiplikation*. For to komplekse tal $z = x + yi$ og $w = u + vi$ er *summen* $x + y$ blot vektorsummen, altså

$$w + z := (u + x) + (v + y)i = (u + x, v + y).$$

For *produktet* wz ønsker vi, at når $w = r$ er et reelt tal, så er rz produktet af skalaren r med vektoren z . Videre ønsker vi de sædvanlige regneregler opfyldt. Herefter får vi regnestykket:

$$wz = (u + vi)(x + yi) = ux + vix + uyi + viyi = ux + vyi^2 + (vx + uy)i.$$

Når værdien af $i^2 = ii$ er fastlagt, er produktet altså fastlagt. Værdien bestemmes som $i^2 = -1$, og regnestykket ovenfor giver nu værdien af wz :

$$wz := (ux - vy) + (vx + uy)i = (ux - vy, vx + uy).$$

Med denne værdi er de sædvanlige regneregler opfyldt. Når $z = x + yi$, er tallet $r := z(x - yi) = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ et reelt tal. Hvis $z \neq 0$, så er $r > 0$, og

$$z \cdot (x - iy)r^{-1} = rr^{-1} = 1;$$

altså er $z^{-1} := (x - yi)/r$ det *reciproke* til z .

Planen for den femte uge, 30/9–4/10, er at undersøge talrummet $\mathbb{R}^n$ beskrevet i [S, 2.5, 2.6], dvs i Sydsæter, bind II, afsnittene 2.5 og 2.6. Ugens øvelser er GG: 3.4, 5.1(a,c,d,e), 5.3(a,b,c), 5.14, 5.8, 5.11. Igen er den første beregnet til skriftlig aflevering.

Anders Thorup