

Ugeseddel 5.

Program. I den 5. uge, 30/9–4/10, må jeg lige omtale de sidste par sider om komplekse tal, [GG, s. 45–46], men hovedemnet er talrummet $\mathbb{R}^n$ beskrevet i [S, 2.5, 2.6]. Ugens øvelser er GG: 3.4, 5.1(a,c,d,e), 5.3(a,b,c), 5.14, 5.8, 5.11. Den første er beregnet til skriftlig aflevering; den blev regnet i sidste uge, så du skal bruge afleveringen til at finde ud af om du har svage punkter i forbindelse med skriftlig fremstilling af matematik.

Rettelser, i [GG]:

side 1₇: $(-1) \mapsto (-)$;

side 2⁹: $(187- \mapsto (287-;$

side 9₉: $, \text{ for } n > M \mapsto , \text{ for } n > N;$

side 39¹²: $(x_1 + x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$

side 41₁₀: $|z_n| \mapsto |z^n|.$

Kuglerne.

- *Real- og imaginærdel* af $z = x + yi$ er, henholdsvis, de reelle tal $\operatorname{Re} z := x$ og $\operatorname{Im} z := y$. [Her, og i det følgende, underforstås i skrivemåden, at x og y er reelle tal selv om vi naturligvis også kan danne $x + yi$ når $x, y \in \mathbb{C}$.]

- *Den numeriske værdi* af $z = x + yi$ er $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Det er bare *normen* af vektoren z , så der gælder:

$$|z| > 0 \text{ for } z \neq 0, \quad |z + w| \leq |z| + |w|, \quad |wz| = |w| |z|.$$

Relationerne, den sidste for $w \in \mathbb{R}$, er jo velkendte egenskaber ved normen. Og faktisk gælder den sidste for alle komplekse tal w .

- *Det konjugerede tal* til $z = x + yi$ er $\bar{z} := x - yi$. Øjensynlig er $z = \bar{\bar{z}}$, hvis og kun hvis $z \in \mathbb{R}$. Der gælder

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}; \quad z \bar{z} = |z|^2.$$

- *Det reciprokke (inverse) tal* til $z \neq 0$ er

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}; \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

- *Et argument* for $z \neq 0$ i $\mathbb{C}$ er blot en vinkel, $\theta = \arg z$, fra vektoren 1 (på x -aksen) til vektoren z . Der står „en vinkel“ og ikke „vinklen“, idet der er *mange* argumenter: når θ er et argument for z , så er argumenterne nemlig tallene $\theta + 2p\pi$ for $p \in \mathbb{Z}$. Vinkler regnes „med fortegn“: den positive omløbsretning er fra 1 til i . Når $z = x + iy$ og $x \neq 0$, er $\tan \theta = y/x$. Herefter kan θ bestemmes ved at bruge den inverse til tangens (fx på en lommeregner).

- *Geometrisk beskrivelse af multiplikation:* Ved multiplikation af z og w multiplicerer man de numeriske værdier og adderer argumenterne: $|zw| = |z| |w|$, og $\arg(zw) = \arg z + \arg w$. Den sidste relation indses sådan: Først betragtes multiplikation med i : Er $w = u + vi$, så er $iw = -v + iu$. I koordinater: vektoren $w = (u, v)$ føres over i $(-v, u)$. Den sidste er

som bekendt *tværvektoren* $\widehat{w}$ til den første; den fås ved at dreje vektoren w vinklen $\pi/2$ i den positive omløbsretning. Nu fås i almindelighed:

$$zw = (x + iy)w = xw + y(iw) = xw + y\widehat{w}.$$

Da w og $\widehat{w}$ er ortogonale og lige lange, følger det, at vinklen fra w til zw er den samme som vinklen fra 1 til z , altså lig med $\arg z$. Vinklen fra 1 til zw er (trivielt) lig med vinklen fra 1 til w plus vinklen fra w til zw , og derfor lig med $\arg w$ plus $\arg z$.

• *Additionsformlerne.* Der er ét tal med numerisk værdi 1 og argument α , nemlig tallet $u_\alpha = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Af den geometriske beskrivelse af multiplikation ses, at produktet $u_\alpha u_\beta$ har numerisk værdi 1 og argument $\alpha + \beta$. Altså er $u_\alpha u_\beta = u_{\alpha+\beta}$. Eller, skrevet ud:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta).$$

Sammenligning af real- og imaginærdel på formlens to sider giver *additionsformlerne*,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Additionsformlerne bruges i [GG, s. 42, l. 4–5] til at bevise, at $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. Vi har bevist den sidste formel direkte.

• *de Moivres formel* $\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$, [GG, s. 44], kan tilsvarende skilles i real- og imaginærdel, og udtrykker cosinus og sinus til $n\theta$ ved hjælp af $\cos \theta$ og $\sin \theta$.

• *Den binome ligning* $z^n = c$, hvor $c \neq 0$, har altid n forskellige løsninger: ud fra $r = |c|$ og $\theta = \arg c$ bestemmes de ved $|z| = \sqrt[n]{r}$, og $\arg z = (\theta + 2p\pi)/n$ for $p = 0, \dots, n-1$.

• *Kompleks kvadratrodd* af $d \in \mathbb{C}$, betegnet $\sqrt{d}$, er en af de to løsninger til ligningen $z^2 = d$. De to løsninger er eksplicit beskrevet i [GG, s. 43]. Herefter løses den almindelige andengradslikning $az^2 + bz + c = 0$ ved kvadratur: Multiplikation med $4a$ giver

$$4a(az^2 + bz + c) = (2az + b)^2 - b^2 + 4ac = (2az + b)^2 - d,$$

hvor $d = b^2 - 4ac$ er diskriminanten. Altså er z en rod, hvis og kun hvis $2az + b = \pm \sqrt{d}$, hvoraf den sædvanlig formel for rødderne: $z = (-b \pm \sqrt{d})/(2a)$.

• *Algebraens Fundamentalsætning*, [GG, s. 45]. Et polynomium $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ med $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ og af grad $n \geq 1$ (dvs. $a_n \neq 0$) har altid en kompleks rod; der er faktisk n rødder $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$, og $p(z) = a_n(z - w_1) \cdots (z - w_n)$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

• *Reelle koefficienter:* Hvis et polynomium med reelle koefficienter har en rod $z \in \mathbb{C}$, så er det konjugerede tal $\bar{z}$ også rod.

Planen for den sjette uge, 7/10–11/10, er transformationer og gradient, behandlet i [S, 2.7, 2.1]. Ugens øvelser er GG: **3.9**; S2.5: 4; S2.6: 1, 3 samt nedenstående opgave.

Opgave 1. (a) Betragt kuglen $B(\mathbf{a}; r)$ med centrum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ og radius $r > 0$. Er den afsluttet? Er den begrænset? Bestem en konvergent punktfølge i kuglen med et grænsepunkt, der ikke ligger i kuglen. (Løs eventuelt først opgaven for $\mathbf{a} = (0, 0)$ og $r = 1$.)

(b) Tegn mængden $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - 1 \leq x_2 \leq x_1^2 + 1\}$. Er S afsluttet? Er S begrænset? Bestem en punktfølge i S uden nogen konvergent delfølge.