

Ugeseddel 6.

Program. I den 6. uge, 7/10–11/10, behandles transformationer (dvs kontinuerte afbildninger fra (en delmængde af) $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$) og gradient, fra [S, 2.7, 2.1]. Ugens øvelser er GG: **3.9**; S2.5: 4; S2.6: 1, 3 samt U5: 1. Måske når jeg at nævne hvad det betyder, at en funktion er *implicit givet*. Men jeg behøver nok ikke nævne, at den efterfølgende uge er efterårsferien.

Parlør.

$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| = \text{normen af } \mathbf{x}, \text{ altså } = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$
 $(0,5) = \text{enten et talpar (et punkt i planen) eller det åbne interval }]0,5[.$

Kuglerne.

• *Rødder og koefficienter.* For et polynomium $p(z)$ af grad $n \geq 1$, med koefficient $a_n = 1$, har vi fremstillingen,

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = (z - w_1) \cdots (z - w_n), \quad (*)$$

hvor $w_1, \dots, w_n$ er de n rødder, talt med multiplicitet, i $p(z)$. Hvis vi har fundet n forskellige rødder i $p(z)$, så er det netop tallene w_i . Har vi færre end n rødder, kan nogle af dem måske være dobbeltrødder (og det kræver en særlig undersøgelse); det kan jo også være, at vi ikke har fundet alle rødderne.

Det skal understreges, at ligningen (*) (naturligvis) udtrykker, at $p(z)$ fremkommer ved at udregne produktet på højresiden. Det er ikke så svært at få et udtryk for de koefficienter, der kommer ved udregningen, og disse koefficienter må altså være koefficienterne a_i . Fx giver udregningen konstantleddet $(-w_1) \cdots (-w_n) = (-1)^n w_1 \cdots w_n$, og koefficienten til z^{n-1} bliver $-w_1 - \cdots - w_n$. Af (*) fås derfor ligningerne,

$$w_1 + \cdots + w_n = -a_{n-1}, \quad w_1 \cdots w_n = (-1)^n a_0.$$

• *Den åbne kugle med centrum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ og radius $r > 0$ er delmængden*

$$B(\mathbf{a}; r) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r \}.$$

For $n = 2$ er det den *åbne cirkelskive*. For $n = 1$ er det det åbne interval $]a - r, a + r[$.

• *Topologi*, [S, s. 53–54]. *Randen* af en delmængde S af $\mathbb{R}^n$, betegnet ∂S , er det som „afgrænser S “ („hertil og ikke længere“). På en tegning ($n = 2$ (eller $n = 3$)) er det typisk randen, man tegner, med en præcision af hvilke dele af randen, der er med. Den matematiske definition er: ∂S består af de punkter $a \in \mathbb{R}^n$ for hvilke der for enhver værdi $r > 0$ gælder, at kuglen $B(\mathbf{a}, r)$ indeholder punkter både fra S og fra komplementærmængden $\mathbb{R}^n - S$. *Afslutningen af S* er foreningen $\bar{S} := S \cup \partial S$, og det *indre af S* er overskudsmængden $S^\circ := S - \partial S$.

$$\mathbf{a} \in \partial S \iff \forall r > 0 : B(\mathbf{a}, r) \cap S \neq \emptyset \text{ og } B(\mathbf{a}, r) - S \neq \emptyset;$$

$$\mathbf{a} \in S^\circ \iff \exists r > 0 : B(\mathbf{a}, r) \subseteq S; \quad \mathbf{a} \in \bar{S} \iff \forall r > 0 : B(\mathbf{a}, r) \cap S \neq \emptyset.$$

Der gælder altid $S^\circ \subseteq S \subseteq \bar{S} \subseteq \mathbb{R}^n$. Delmængden S er *åben*, hvis alle punkter i S er indre, dvs $S^\circ = S$. Og S er *lukket/afsluttet*, hvis alle randpunkter ligger i S , dvs $S = \bar{S}$.

Endelig er S *begrænset*, hvis $S \subseteq B(\mathbf{0}; R)$ for en passende (stor) værdi $R > 0$, og S er *kompakt*, hvis S er både afsluttet og begrænset.

• *Eksempler.* Åbne intervaller er åbne delmængder af $\mathbb{R}$:

$$]a, b[, \quad]a, \infty[, \quad]-\infty, a[, \quad]-\infty, \infty[= \mathbb{R},$$

og afsluttede intervaller er afsluttede delmængder:

$$[a, b], \quad [a, \infty[, \quad]-\infty, a], \quad]-\infty, \infty[= \mathbb{R},$$

De endelige intervaller $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ og $[a, b]$ er begrænsede. Kun $[a, b]$ er kompakt.

Den åbne kugle $B := B(\mathbf{a}; r)$ er åben, $B = B^\circ$, og

$$B^\circ = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}, \quad \partial B = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}, \quad \overline{B} = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}.$$

• *Kontinuert afbildning*, [S, s. 55 og s. 64]. En afbildning $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ (en vektorafbildning) er kontinuert, hvis den er kontinuert i hvert punkt $\mathbf{a} \in S$, dvs hvis der for hvert $\mathbf{a}$ i S og hvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$ så at der for alle $\mathbf{x} \in S$ gælder:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon.$$

• *Konvergent punktfølge.* En følge $(\mathbf{x}_k)$ i $\mathbb{R}^n$ (en *punktfølge*), er konvergent, hvis og kun hvis hver af de n koordinatfølger er en konvergent (tal)følge, [GG, s. 8] og [S, s. 59].

• *Karakterisering ved følger.* For en delmængde S af $\mathbb{R}^n$ gælder:

- (i) S er afsluttet $\iff$ for enhver konvergent følge $\mathbf{x}_k$ fra S (dvs $\mathbf{x}_k \in S$) gælder, at $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k \in S$ [S, s. 60; ikke så svært].
- (ii) S er begrænset $\iff$ enhver følge $\mathbf{x}_k$ fra S har en konvergent delfølge [S, s.60-61; ikke så let!].
- (iii) S er kompakt $\iff$ enhver følge fra S har en delfølge, der konvergerer mod et punkt i S [S, s. 61, let ifølge de foregående to!].
- (iv) $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert $\iff$ for enhver konvergent følge $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$, hvor $\mathbf{a} \in S$ og $\mathbf{x}_k \in S$ gælder, at $f(\mathbf{x}_k) \rightarrow f(\mathbf{a})$ [S, s. 65].

• *Hovedsætning om kontinuerte afbildninger*, [S, s. 67]. Hvis $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ er kontinuert, så gælder:

$$S \text{ kompakt} \implies f(S) \text{ kompakt}.$$

Planen for den syvende undervisningsuge, 21/10–25/10 (efter efterårsferien), er at omtale implicit givne funktioner fra [S 2.12]. Opgaverne er GG: **5.9**; S2.1: 1, 2, 4, samt nedenstående:

Opgave 1. Lad $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Begrund, bl.a. ved henvisning til passende sætning, at talfølgen $\{f(\sqrt[k]{k}, (1 + \frac{1}{k})^k)\}$ er konvergent, og angiv grænseværdien.