

Ugeseddel 7.

Program. Husk nu at holde efterårsferie!

Parlør.

- $|A|$ = det A (determinant af kvadratisk matrix A),
- ‘kjerneregelen’ = kædereglen,
- ‘kontinuerlig’ = kontinuert,
- ‘matrise’ = matrix [men: matricen, flere matricer, alle matricerne],
- ‘tillukningen’ = afslutningen [med mindre du snakker norsk],

Kuglerne.

• *Skarpe uligheder bestemmer åbne mængder:* Antag, at der er givet kontinuerte funktioner f_i og g_i definerede på en *åben* delmængde S af $\mathbb{R}^n$ (fx på hele $S = \mathbb{R}^n$). Så vil delmængden af S bestående af de punkter $\mathbf{x}$, som opfylder endelig mange skarpe uligheder,

$$f_1(\mathbf{x}) < g_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}) < g_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S,$$

være en *åben* mængde i $\mathbb{R}^n$. Tilsvarende, hvis funktionerne er definerede på en *afsluttet* mængde S (igen fx $S = \mathbb{R}^n$), så *bestemmer endelig mange „bløde uligheder“* $f_i(\mathbf{x}) \leq g_i(\mathbf{x})$ *en afsluttet delmængde*. Det sidste resultat følger, i hvert fald når $S = \mathbb{R}^n$, af Sætning 2.11 i [S, s. 66], det første tilsvarende af opgave 3 [S, s. 68]. Du må, ved at henvise til kuglen her, benytte begge resultater!

Bemærk, at resultatet med de bløde uligheder indbefatter en (eller flere) „ligheder“: ligningen $y = z$ gælder, hvis og kun hvis $y \leq z$ og $z \leq y$. Og ulighederne må også „vende den anden vej“: $y \geq z \iff -z \leq -y$.

• *Maksimum-problemet.* Følgende problem er fundamentalt i MASO: Bestem

$$\max f(\mathbf{x}) \quad \text{for } \mathbf{x} \in S.$$

Her er $S \subseteq \mathbb{R}^n$, og vi forudsætter, at f er en pæn (tilstrækkeligt differentiabel) funktion, typisk defineret på en *åben* delmængde, der omfatter S . En *løsning* på problemet (kaldet et *maksimumspunkt*) er et punkt $\mathbf{x}_0 \in S$, hvori funktionsværdien er maksimal, dvs

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ for alle } \mathbf{x} \in S.$$

• *Pas på!* Man kunne tro, at problemet består i at bestemme maksimumpunktet, men den første vanskelighed er, at problemet ikke nødvendigvis har løsninger: der findes måske slet ikke maksimumpunkter! Der er tre muligheder:

- (1) Funktionen $f(\mathbf{x})$ kan antage vilkårligt store værdier: den er *ikke* opad begrænset, og $\sup f(\mathbf{x})$ (supremum over funktionsværdierne for $\mathbf{x} \in S$) er $+\infty$.
- (2) Funktionen $f(\mathbf{x})$ er opad begrænset, men supremum $m := \sup f(\mathbf{x})$ er *ikke* en funktionsværdi.
- (3) Funktionen $f(\mathbf{x})$ er opad begrænset, og tallet $m := \sup f(\mathbf{x})$ er en funktionsværdi.

Det er kun i det tredje tilfælde, at der findes maksimumpunkter: det er netop de punkter $\mathbf{x}_0$, der opfylder $m = f(\mathbf{x}_0)$.

Hovedresultat: Hvis S er kompakt (og $S \neq \emptyset$) og f er kontinuert, så er det nødvendigvis tilfælde (3), der foreligger; det fortæller ikke, hvordan et maksimumspunkt så kan bestemmes.

• **Søjler og rækker.** En vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ er blot et sæt af n reelle tal v_i , for $i = 1, \dots, n$. For forståelsen er det ligegyldigt, om man skriver tallene (koordinaterne) ved siden af hinanden, som en række, eller under hinanden, som en søjle. Det er imidlertid praktisk at vedtage, at vektorer så vidt muligt skrives som søjler. Når man, fx af typografiske eller af andre grunde, ønsker at skrive koordinaterne i $\mathbf{v}$ på række, kan man skrive $\mathbf{v}^t$ ('t' for transponering):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^t = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

• **Jacobi-matricen** for en pæn (dvs passende differentiabel) vektorafbildning $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^m$, hvor S er en åben delmængde af $\mathbb{R}^n$, er matricen $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, som består af de *partielle afledede* $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ (eller $\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j$). Når man følger konventionen og skriver vektorer som søjler, er det let at huske formen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial f_1(\mathbf{x})/\partial x_1 & \dots & \partial f_1(\mathbf{x})/\partial x_n \\ \partial f_2(\mathbf{x})/\partial x_1 & \dots & \partial f_2(\mathbf{x})/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_m(\mathbf{x})/\partial x_1 & \dots & \partial f_m(\mathbf{x})/\partial x_n \end{pmatrix}$$

Ofte skriver man $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, og man siger, at $\mathbf{y}$ 'erne *afhænger* af $\mathbf{x}$ 'erne. Når afbildningen $\mathbf{f}$ er underforstået, skrives også $\partial \mathbf{y}/\partial \mathbf{x}$ for Jacobi-matricen.

Kædereglene for vektorafbildninger: Er $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ endnu en vektorafbildning $\mathbf{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, da gælder for Jacobi-matricerne:

$$(\mathbf{g}\mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x}), \quad \text{eller} \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}.$$

På venstresiden betragtes $\mathbf{z}$ 'erne som funktioner af $\mathbf{x}$ 'erne (det er den sammensatte afbildning $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$). I den første matrix på højresiden betragtes $\mathbf{z}$ 'erne som funktioner af $\mathbf{y}$ 'erne, dvs $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, men i matricen $\partial \mathbf{z}/\partial \mathbf{y}$ skal man indsætte $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

• **Kurver.** Tilfældet $n = 1$. Her er S typisk et interval i $\mathbb{R}$, og afbildningen $x \mapsto \mathbf{f}(x)$ afhænger kun af én variabel. Den beskriver en *kurve* i $\mathbb{R}^m$. Jacobi-matricen $\mathbf{f}'(x)$ er her en søjle. Det er kurvens *tangentvektor* i kurvepunktet $\mathbf{f}(x)$. Altså

$$\mathbf{f}(x)^t = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad \mathbf{f}'(x)^t = (f'_1(x), \dots, f'_m(x)),$$

hvor $f'_j(x)$ blot er sædvanlig differentialkvotient af den reelle funktion $f_j(x)$.

• **Gradient**, [S, s. 34]. Tilfældet $m = 1$. Her er vektorafbildningen en reel funktion $f(\mathbf{x})$ af n variable. Jacobi-matricen er her en række. Det er funktionens *gradient*, der også betegnes $\nabla f(\mathbf{x})$. [∇ læses „nabla“.] Husk: Ud fra $\mathbf{a}$ vokser $f(\mathbf{x})$ hurtigst i retningen $\nabla f(\mathbf{a})$.

Planen for den 7. undervisningsuge, 21/10–25/10 (efter efterårsferien), omfatter implicit givne funktioner fra [S 2.12] (og måske lidt om invers funktion fra [S 2.11]). Opgaverne er GG: 5.9; S2.1: 1, 2, 4, samt U6: 1.