

Ugeseddel 8.

Program. I den 7. uge, 21/10–25/10 (efter efterårsferien), omtales implicit givne funktioner fra [S 2.12] (og måske lidt om invers funktion fra [S 2.11]). Opgaverne er GG: 5.9; S2.1: 1, 2, 4, samt U6: 1.

Kuglerne.

- Vi prøver igen. Maksimeringsproblemet, maksimér $f(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in S$ eller, lidt kortere,

$$(\max) \quad f(\mathbf{x}) \quad \text{for } \mathbf{x} \in S,$$

går ud på at finde et punkt $\mathbf{x}_0 \in S$, hvori funktionen antager sin største værdi, dvs således at

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ for alle } \mathbf{x} \in S$$

Et sådant punkt (der kan være flere) kaldes et *maksimumpunkt*.

Pas på! Man kunne tro, at problemet består i at bestemme et maksimumpunkt, men den første vanskelighed er, at problemet ikke nødvendigvis har løsninger: der findes måske slet ikke maksimumpunkter! Der er flere muligheder for funktionen $f(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in S$:

- (0) Funktionen $f(\mathbf{x})$ er opad begrænset, men tallet $m := \sup f(\mathbf{x})$ (supremum over funktionsværdierne for $\mathbf{x} \in S$) er ikke en funktionsværdi.
- (1) Funktionen $f(\mathbf{x})$ er opad begrænset, og tallet $m := \sup f(\mathbf{x})$ er en funktionsværdi. Det er ensbetydende med, at der findes et maksimumpunkt.
- (2) Funktionen $f(\mathbf{x})$ kan antage vilkårligt store værdier: den er ikke opad begrænset, og $\sup f(\mathbf{x})$ er $+\infty$.

Strengt taget er der yderligere et tilfælde, nemlig $S = \emptyset$.

Det er kun i tilfældet (1), at der findes maksimumpunkter: det er netop de punkter $\mathbf{x}_0$, der opfylder $m = f(\mathbf{x}_0)$.

Hovedresultat: Hvis S er kompakt (og $S \neq \emptyset$) og f er kontinuert, så er det nødvendigvis tilfælde (1), der foreligger. Bemærk, at resultatet ikke fortæller, hvordan et maksimumpunkt så kan bestemmes.

• *Niveaukurver og -flader*, [S, s. 35]. For en funktion $f(\mathbf{x})$ af 2 variable, altså $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, hvor S er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$, vil delmængden af S bestemt ved ligningen $f(\mathbf{x}) = c$ typisk være en kurve. Disse kurver, for forskellige værdier af c , kaldes *niveaukurverne* for f . De udfylder mængden S : Gennem punktet $\mathbf{a}$ går niveaukurven med ligningen $f(\mathbf{x}) = c$, hvor $c := f(\mathbf{a})$.

Med 3 variable, altså $S \subseteq \mathbb{R}^3$, giver ligningen $f(\mathbf{x}) = c$ en *niveauflade*, og for $S \subseteq \mathbb{R}^n$ med $n > 3$ taler man om en *niveau(hyper)flade*.

HUSK: Gradienten $\nabla f(\mathbf{a})$ står vinkelret på niveaufladen gennem $\mathbf{a}$, [S, s. 38].

Det betyder, at *tangentplanen* til niveaufladen gennem $\mathbf{a}$ er planen gennem $\mathbf{a}$ vinkelret på $\nabla f(\mathbf{a})$. Det fastlægger tangentplanen, hvis $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$: punktet $\mathbf{x}$ ligger på tangentplanen, hvis og kun hvis vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ er vinkelret på $\nabla f(\mathbf{a})$. Tangentplanen er altså bestemt ved ligningen,

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0.$$

Tilfældet $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ er en undtagelse, der typisk viser sig ved, at niveaufladen gennem $\mathbf{a}$ ikke er pæn og glat: det er en såkaldt *singularitet*.

Planen for den ottende undervisningsuge, 28/10–1/11, omfatter invers funktion (og repetition af konkave/konvekse funktioner), fra [S, 2.11, 4.6, 4.7]. Opgaverne er S2.1: 3; S2.12: 1; S2.7: 3, samt opgave 1 og 2 herunder. Den første af de følgende opgaver er altså til skriftlig aflevering.

Opgave 1. Funktionen $f: [4, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

- (a) Begrund, at f er voksende, og at $\ln x \leq \sqrt{x}$, når $x \geq 4$.
- (b) Lad $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ være en konvergent punktfølge i $\mathbb{R}^2$ med grænsepunkt (a, b) . Antag, at $4 \leq x_k$ og $\ln x_k \leq y_k \leq \sqrt{x_k}$ for alle k . Begrund, at $4 \leq a$ og $\ln a \leq b \leq \sqrt{a}$. Hvis begrundelsen indeholder henvisning til kontinuitet af visse funktioner, bør det klart fremgå hvilke funktioner, det drejer sig om.
- (c) Begrund, at mængden $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x \text{ og } \ln x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ er lukket.
- (d) Begrund, at afbildningen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ givet ved $g(t) := (\exp t, t + \cos t)$ er kontinuert, og at $g^{-1}(S)$ er en lukket delmængde af $\mathbb{R}$. (Det er ikke nødvendigt at finde denne delmængde.)
- (e) Bestem en ubegrænset punktfølge i S , og afgør, om S er kompakt.

Opgave 2. Betragt funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- (a) Begrund, at f er en C^1 -funktion, og angiv dens partielle afledede ('deriverede').
- (b) Beskriv niveaukurven N_1 for f svarende til niveauet 1.
- (c) Begrund, at N_1 omkring punktet $(0, 1)$ definerer y som en C^1 -funktion af x .
- (d) Bestem størst muligt interval I omkring 0 og C^1 -funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, så grafen for φ , dvs $\{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}$, er en del af N_1 . Udregn φ' direkte, og sammenlign resultatet med en passende formel.
- (e) Angiv en anden C^1 -funktion $\tilde{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}$ end φ , så $\{(x, \tilde{\varphi}(x)) \mid x \in I\} \subseteq N_1$.
- (f) Begrund, at N_1 omkring punktet $(1, 0)$ definerer x som C^1 -funktion af y .
- (g) Bestem størst muligt interval J omkring 0 og C^1 -funktion $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$, så grafen $\{(\psi(y), y) \mid y \in J\}$ er en del af N_1 . Udregn ψ' direkte, og sammenlign resultatet med en passende formel.
- (h) Begrund, at N_1 omkring ethvert $(a, b) \in N_1$ med $a \neq 0$ og $b \neq 0$ **både** definerer y som C^1 -funktion α af x **og** definerer x som C^1 -funktion β af y . Begrund, at $\alpha'(a)\beta'(b) = 1$.

Opgave 3. Betragt funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x, y) = x^2 - y^2$.

- (a) Begrund, at f er en C^1 -funktion.
- (b) Skitsér niveaukurven $N_9: f(x, y) = 9$, og begrund, at $(5, 4)$ ligger på den.
- (c) Bestem en ligning for tangenten til N_9 i $(5, 4)$, og angiv dens hældningskoefficient.
- (d) Begrund, at N_9 i et passende åbent rektangel om $(5, 4)$ bestemmer y som en C^1 -funktion φ af x .
- (e) Angiv $\varphi(5)$, og bestem $\varphi'(5)$.
- (f) Bestem et størst muligt åbent rektangel $W = A \times B$ om $(5, 4)$, så der findes C^1 -funktion $\alpha: A \rightarrow B$ med $N_9 \cap W = \{l(x, \alpha(x)) \mid x \in A\}$.
- (g) Bestem en formel for den afledede α' .