

Ugeseddel 9.

Program. I den ugen 28/10–1/11 omtales invers funktion og konkave/konvekse funktioner, fra [S, 2.11, 4.6, 4.7]. Opgaverne er S2.1: 3; S2.12: 1; S2.7: 3, samt U8: 1, 2.

Parlør.

‘transformation’ = vektorafbildning (eller afbildning) [ordet ‘transformation’ reserveres på dansk sædvanligvis til vektorafbildninger, der har en invers],

‘enentydig’ = enentydig (noget gammeldags) eller injektiv. At $y = f(x)$ er injektiv betyder, at to forskellige x ’er, $x_1 \neq x_2$, altid giver forskellige y -værdier, $f(x_1) \neq f(x_2)$,

‘deriverte’ = afledede.

Kuglerne.

• **Retningsafledet**, [S, s. 36–37]. For $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, et punkt a i S og en vektor v i $\mathbb{R}^n$, beskriver $t \mapsto a + tv$ en linie gennem a ; punktet a svarer til $t = 0$. Funktionen $t \mapsto f(a + tv)$ fås således ved at betragte f ’s værdier på denne linie: det er f ’s restriktion til linien. Differentiation mht til t giver den retningsafledede $f'_v(a)$ og en formel:

$$f'_v(a) = \frac{d}{dt} f(a + tv) \Big|_{t=0} = \nabla f(a) \cdot v.$$

• **Sætning om implicit given funktion.** Lad $f(x, y)$ være en C^1 -funktion defineret i en åben delmængde S , og betragt ligningen:

$$f(x, y) = 0, \quad (*)$$

og et punkt $(x_0, y_0) \in S$ hvor ligningen gælder, dvs $f(x_0, y_0) = 0$. Antag, at $|f'_y(x_0, y_0)| \neq 0$. Da vil ligningen for (x, y) tæt ved (x_0, y_0) bestemme y som funktion af x , og y' bestemmes ved at differentiere ligningen (*), hvor y opfattes som funktion af x , ved brug af kædereolen: $f'_x(x, y) \cdot 1 + f'_y(x, y) \cdot y' = 0$.

Mere præcist: Da findes et (lille) åbent rektangel $R = I \times J$ omkring (x_0, y_0) således, at ligningen (*) i rektanglet er ensbetydende med en ligning af formen $y = \varphi(x)$. Med andre ord: for hvert $x \in I$ findes præcist ét $y \in J$ således, at $f(x, y) = 0$; dette entydigt bestemte y betegnes $\varphi(x)$. Yderligere gælder, at rektanglet kan vælges så lille, at $|f'_y| \neq 0$ for alle $(x, y) \in R$, og så er funktionen $y = \varphi(x)$ en C^1 -funktion, defineret for $x \in I$, og differentialkvotienten $y' = \varphi'(x)$ er bestemt af ligningen:

$$f'_x + f'_y y' = 0; \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (**)$$

At $R = I \times J$ er et rektangel omkring (x_0, y_0) betyder, at I og J er bestemt ved uligheder: $|x - x_0| < \delta$ og $|y - y_0| < \varepsilon$.

Funktionen $y = \varphi(x)$ er *implicit bestemt* ved ligningen (*). Bemærk, at $y_0 = \varphi(x_0)$, og at bestemmelsen af $y = \varphi(x)$ *forudsætter*, at der er givet en sådan begyndelsesværdi med $f(x_0, y_0) = 0$. Bemærk også, at sætningen *ikke* udtaler sig om, hvor stort intervallet I kan vælges.

• *Mange variable.* Du tænker sikkert på ovenstående resultat som det simple tilfælde [S, s. 89], hvor $f(x, y)$ er en funktion af to variable: S er en delmængde af $\mathbb{R}^2$. Vitsen er imidlertid, at du får det generelle resultat [S, s. 91] ved at opfatte x og y som vektorer, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ og f som en vektorafbildning $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ (lige mange koordinater i $\mathbf{y}$ og i $\mathbf{f}$). I forudsætningen $|\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}| \neq 0$ er $\mathbf{f}'_{\mathbf{y}} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{y}$ Jacobimatrixen (af $\mathbf{f}$ 'erne differentieret mht $\mathbf{y}$ 'erne), og $|\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}|$ er Jacobimatrixens determinant. Differentialkvotienten $\mathbf{y}' = \boldsymbol{\varphi}'$ er Jakobimatrixen for $\boldsymbol{\varphi}$, og ligningen, den indgår i, er en matrixligning,

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{x}} + \mathbf{f}'_{\mathbf{y}} \mathbf{y}' = \mathbf{0}; \quad \text{eller} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}. \quad (**)$$

Hvis der er n variable i $\mathbf{x}$, og m variable i $\mathbf{y}$ (og altså også m koordinatfunktioner i $\mathbf{f}$), så er $\mathbf{f}'_{\mathbf{y}}$ en (kvadratisk) $m \times m$ -matrix og $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{y}'$ er $m \times n$ -matricer.

• *Hvad er det værd?* Ligningen (**) kan umiddelbart løses med hensyn til $\mathbf{y}'$: det giver $\mathbf{y}' = -(\mathbf{f}'_{\mathbf{y}})^{-1} \mathbf{f}'_{\mathbf{x}}$. Fx, for $n = m = 1$ fås $y' = -f'_x/f'_y$. Husk, at f'_x og f'_y igen er funktioner af (x, y) , altså mere udførligt:

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Pas på: venstresiden y' er differentialkvotienten af den implicit bestemte funktion $\varphi(x)$, altså $y' = \varphi'(x)$; på højresiden er det underforstået, at man skal indsætte $y = \varphi(x)$, altså $(x, \varphi(x))$ for (x, y) . Specielt, for et givet x (tæt ved x_0), kan ligningen som regel kun bruges til at bestemme $\varphi'(x)$, når man også kender $\varphi(x)$. Men det gør man jo specielt for $x = x_0$, hvor $\varphi(x_0) = y_0$.

De højere afledede af y kan bestemmes ved yderligere differentiation af ligningen (**).

• *Invers afbildning.* At „bestemme den inverse“ til en given vektorafbildning $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ betyder, lidt løst, at udtrykke $\mathbf{x}$ 'erne som funktioner af $\mathbf{y}$ 'erne, altså for et givet $\mathbf{y}$ at bestemme det $\mathbf{x}$, for hvilket $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Lad dig ikke narre af ordlyden: i almindelighed findes den inverse slet ikke! Givet er en vektorafbildning $\mathbf{h}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, hvor $S \subseteq \mathbb{R}^n$. For det første er det kun, når $\mathbf{y}$ tilhører *billedmængden*, $T := \mathbf{h}(S)$, at man kan gøre sig håb om at finde et passende $\mathbf{x}$. For det andet, når $\mathbf{y} \in T$, vil der i almindelighed findes mere end ét $\mathbf{x}$ med $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, og man må indskrænke S (fx til en kugle omkring et givet $\mathbf{x}_0$) for at få entydigheden af $\mathbf{x}$. Resultatet fra [S, s. 84–85], at den inverse findes lokalt når $|\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x}| \neq 0$, fås ved at anvende sætningen om implicit given funktion (med $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ ombyttet) på ligningen $\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (hvor altså $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x})$) og et givet $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, hvor $\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$.

• *Dobbelt differentiation.* For en C^2 -funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ i n variable betyder $f''_{i,j} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$: differentier partielt mht først x_j og dernæst x_i . Ifølge [Sydsæter I, §11.6] er $f''_{i,j} = f''_{j,i}$.

Planen for den niende undervisningsuge, 4/11–8/11, omfatter ikke-lineær programmering fra [S, 4.13]. Opgaverne er S4.6: 1, 2, 3, 4, 5, samt U8: 3.