

Ugeseddel 10.

Program. I ugen 4/11–8/11 er emnet ikke-lineær programmering fra [S, 4.13]. Opgaverne er S4.6: 1, 2, 3, 4, 5, samt U8: 3 til skriftlig aflevering.

Bemærk i øvrigt, at sidste forelæsningsdag er maraton, mandag den 2. december, formodentlig kl. 8.55–14.15. Herefter er der eksamen: individuel hjemmeopgave. Opgaven udeliveres fra MØK-sekretariatet den 3. december kl 12, og skal afleveres på MØK-sekretariatet senest den 6. december kl 12.00. Kursets fortsættelse til foråret, DOK (Differentialligninger og optimal kontrolteori), begynder allerede i uge 1, med maratonforelæsninger.

Kuglerne.

- *Bemærk*, at man, som det fremgår af den første kugle på U9, kan tillade sig, for en vilkårlig vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, at kalde den afledede $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ for den *retningsafledede*; Sydsæter [S, s. 36–37] bruger kun ordet, når v er en enhedsvektor.

- *Hesse-matricen* for en C^2 -funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ er matricen $\text{Hesse}(f)(\mathbf{x}) = f''(\mathbf{x})$ bestående af de „dobbelte-afledede“ $f''_{ij}(\mathbf{x})$, hvor $f''_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$. Den er symmetrisk, idet $f''_{ij} = f''_{ji}$. Jacobi-matricen for f er rækkematricen $f' = (f'_1, \dots, f'_n)$. Når f' opfattes som en vektorafbildning, med koordinatfunktionerne f'_i , fås f'' som Jacobimatricen for f' .

- *Positiv matrix.* For en symmetrisk matrix B skrives $B \geq 0$, hvis B er positiv semidefinit, og $B > 0$, hvis B er positiv definit. Med andre ord: $B \geq 0 \iff v^t B v \geq 0$ for alle v , og $B > 0 \iff v^t B v > 0$ for alle $v \neq 0$.

- *Deteminant-kriteriet*, se [Lineær Algebra] (eventuelt [S, s. 156]):

$$B \geq 0 \iff \Delta_r \geq 0 \text{ for enhver hovedunderdeterminant } \Delta_r.$$

$$B > 0 \iff \Delta_r > 0 \text{ for en enhver hovedunderdeterminant } \Delta_r; \text{ det er nok, at } D_r > 0 \text{ for de ledende hovedunderdeterminanter } D_r.$$

- *Under korden*, [S, s. 168]. Antag i det følgende, at $S \subseteq \mathbb{R}^n$ er en konveks delmængde. Funktionen $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ kaldes *konveks*, når grafen for f , mellem to punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$, altid ligger under korden, der forbinder $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ og $(\mathbf{b}, f(\mathbf{b}))$, altså når

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{b}), \quad \text{for } 0 < \lambda < 1. \quad (*)$$

Når S er åben og f er en C^2 -funktion: f konveks $\iff f''(\mathbf{x}) \geq 0$ for alle $\mathbf{x}$, [S, s. 170].

Pas på med den simple notation: $f''(\mathbf{x})$ er en matrix, og skrivemåden $f''(\mathbf{x}) \geq 0$ udtrykker, at den er positiv semidefinit; det undersøges typisk ved at kigge på fortegn for hovedunderdeterminanter.

- *Regning med konvekse funktioner*, [S, s. 173, 179]: Antag $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ er konvekse. Så er følgende funktioner på S konvekse:

$$\text{konstant, lineær funktion, } af \text{ (for } a > 0), \quad f + g, \quad \max\{f, g\}, \quad \text{sampt } F(f),$$

den sidste når F er en funktion af én variabel, som er konveks og voksende.

- *Over tangenten*, [S, s. 176]. Når S er åben og f er en C^1 -funktion: f er konveks hvis og kun hvis grafen for f ligger over enhver af sine tangentplaner (tangenten for $n = 1$).

Tangentplanen gennem $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ er grafen for funktionen $f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$, så f er konveks $\iff$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in S$:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n f'_i(\mathbf{a})(x_i - a_i). \quad (**)$$

Heraf: f (konveks) har globalt minimum i $\mathbf{a}$, hvis og kun hvis $\mathbf{a}$ er stationært punkt for f .

• **Strengt konvekse funktioner.** At f er strengt konveks betyder, at grafen ligger strengt under (dvs ikke „på“) korden, dvs at „ $<$ “ altid gælder i (*) $\iff$ „ $>$ “ gælder i (**) for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. Det er tilstrækkeligt, at $f''(\mathbf{x}) > 0$ for alle $\mathbf{x}$ (og det sidste kan checkes via ledende hovedunderdeterminanter).

• **Konkave funktioner.** f er konkav $\iff -f$ er konveks. Heraf udledes egenskaberne for konkave funktioner. Pas på med determinanterkriteriet: B er negativ semidefinit, hvis og kun hvis $-B$ er positiv semidefinit, men fortegnsskiftet, fra B til $-B$, bevirker kun et fortegnsskift på de „ulige“ underdeterminanter.

Eksempel. Funktionen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ er blot normen i $\mathbb{R}^2$, altså $r(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$. Den er konveks: Af velkendte egenskaber ved norm fås, når $0 < \lambda < 1$:

$$|\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}| \leq \lambda |\mathbf{a}| + (1 - \lambda) |\mathbf{b}| = \lambda |\mathbf{a}| + (1 - \lambda) |\mathbf{b}|.$$

Hesse-matricen fås ved at differentiere: $\partial r / \partial x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = x / \sqrt{x^2 + y^2}$, og tilsvarende med $\partial r / \partial y$. Det kan (smart) skrives sådan: $\partial r / \partial x = x/r$, $\partial r / \partial y = y/r$, hvoraf

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1r - x \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3},$$

og $\partial^2 r / \partial y^2 = x^2 / r^3$, og

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (x r^{-1}) = x(-1)r^{-2} \frac{\partial}{\partial y} r = \frac{-x}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{-xy}{r^3}.$$

Altså:

$$r'' = \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

Øjensynlig er $r'' \geq 0$ (ja, det synes du da også, ikke?). Bemærk imidlertid, at funktionen r kun er differentiabel for $(x, y) \neq (0, 0)$, så udregningen af Hesse-matricen giver *ikke*, at r er konveks på hele $\mathbb{R}^2$.

Planen for den tiende undervisningsuge, 11/11–15/11, omfatter Lineær programmering: basisløsninger; Farkas' alternativ fra Noterne, [F, §1, §2, §3]. Øvelserne er S2.12: 6; S4.13: 1, 3; S4.7: 3, samt U10: 1, dvs nedenstående

Opgave 1. (Fortsættelse af U8, opgave 3) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved $f(x, y) = x^2 - y^2$, og N_9 er niveaukurven med ligningen $N_9: f(x, y) = 9$.

(h) Bestem størst muligt åbent rektangel $W_1 = A_1 \times B_1$ om $(5, 4)$, så der findes en funktion $\beta: B_1 \rightarrow A_1$ med $N_9 \cap W_1 = \{(\beta(y), y) \mid y \in B_1\}$.

(i) Angiv $\beta(4)$ og $\beta'(4)$, og bestem en formel for $\beta'(y)$ for alle $y \in B_1$.

(j) Angiv α og β eksplicit, og bestem α' og β' ved differentiation.