

Ugeseddel 11.

Program. I ugen 11/11–15/11 er emnet Lineær programmering fra noterne, [F, §1, §2, §3]: Basisløsninger; Farkas' alternativ. Øvelserne er S2.12: 6; S4.13: 1, 3; S4.7: 3, samt U10: 1 (på forelæsningsplanen stod der fejlagtigt U9: 1).

Kuglerne.

- *Maksimerings-problemet*,

$$(\max) \quad f(\mathbf{x}) \quad \text{for } \mathbf{x} \in S.$$

Antag, at S i problemet er en konveks delmængde af $\mathbb{R}^n$, at funktionen $f(\mathbf{x})$ er konkav, og at $\mathbf{x}_0$ er et indre punkt i S . Da gælder: $\mathbf{x}_0$ et maksimumspunkt $\iff \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (altså hvis og kun hvis $\mathbf{x}_0$ er stationært punkt for f), [S, s. 177].

- *Aktive betingelser.* I Kuhn–Tucker's sætning er delmængden S bestemt ved „bløde“ uligheder:

$$S : \quad g_1(\mathbf{x}) \leq b_1, \quad g_2(\mathbf{x}) \leq b_2, \quad \dots, \quad g_m(\mathbf{x}) \leq b_m \quad (*)$$

(og funktionerne $f(\mathbf{x})$ og $g_j(\mathbf{x})$ er „pæne“ funktioner). En enkelt ligning $g_j(\mathbf{x}) = b_j$ bestemmer typisk en niveauflade (af dimension $n - 1$) i $\mathbb{R}^n$, og mængden $S_j := \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) \leq b_j\}$ består af de punkter, der ligger på den ene side af (eller på) niveaufladen. Niveaufladen er typisk randen af S_j . Betragt et punkt $\mathbf{x}_0$ på fladen, altså $g_j(\mathbf{x}_0) = b_j$. Gradienten $\nabla g_j(\mathbf{x}_0)$ er vinkelret på fladen, og det er den retning, hvori funktionen vokser (mest). Går man fra $\mathbf{x}_0$ i gradientens retning, og ikke ret langt fra $\mathbf{x}_0$, kommer man altså til punkter $\mathbf{x}$, hvor $g_j(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x}_0)$, dvs til punkter, der ikke tilhører S_j . Med andre ord: *gradienten $\nabla g_j(\mathbf{x}_0)$ peger væk fra S_j .*

Mængden S er fællesmængden af S_j 'erne, og randen af S består punkter, der ligger på en eller flere af niveauflaterne, altså af punkter $\mathbf{x} \in S$, hvor et eller flere lighedstegn $g_j(\mathbf{x}) = b_j$ gælder. Hvis $g_j(\mathbf{x}) = b_j$ siges funktionen g_j (eller den j 'te bibetingelse) af være *aktiv* i $\mathbf{x}$. *Føringsbetingelsen* er opfyldt i $\mathbf{x} \in S$, hvis gradienterne $\nabla g_j(\mathbf{x})$ for de aktive funktioner er lineært uafhængige. Det er altid opfyldt, når $\mathbf{x}$ ligger i det indre af S . At det er opfyldt for et punkt $\mathbf{x}$ på randen af S , betyder intuitivt, at de niveauflater, der går gennem $\mathbf{x}_0$, „skærer hinanden pænt“, så at randen ikke bliver singular i $\mathbf{x}_0$. Bemærk, at føringsbetingelsen alene er en betingelse på delmængden S ; den involverer ikke funktionen f .

- *Kuhn–Tucker's sætning.* Betragt problemet (max), hvor S er beskrevet ved ulighederne (*), og lad $\mathbf{x}_0 \in S$. Da gælder [S, s. 210]:

Hvis $\mathbf{x}_0$ er et maksimumspunkt og føringsbetingelsen er opfyldt i punktet $\mathbf{x}_0$, så findes tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, der opfylder:

$$(a) \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) - \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) - \dots - \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

$$(b) \quad \lambda_j \geq 0 \text{ og enten er } \lambda_j = 0 \text{ eller } g_j(\mathbf{x}_0) = b_j.$$

Omvendt gælder [S, s. 213], at hvis der findes tal $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ således, at (a) og (b) er opfyldt og Lagrangefunktionen $f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_m g_m(\mathbf{x})$ er konkav (defineret i en åben konveks mængde, der indeholder S), så er $\mathbf{x}_0$ et maksimumspunkt.

- *KT-programmet.* Den første del af sætningen siger, at *Kuhn–Tucker's betingelser*, dvs (a) plus (b), er *nødvendige betingelser*: **Hvis** $\mathbf{x}_0$ er et maksimumspunkt, **så** gælder betingelserne (idet vi ser bort fra føringsbetingelsen). Hvis vi kan bestemme de punkter $\mathbf{x}$, hvor Kuhn–Tucker's betingelser er opfyldt, så må et eventuelt maksimumspunkt ligge blandt de bestemte. Det kan systematiseres:

For hvert sæt af k udvalgte bibetingelser søger vi at bestemme alle punkter $\mathbf{x}$, hvor Kuhn–Tucker’s betingelser er opfyldt med de udvalgte som aktive (eller hvor føringsbetingelsen bryder sammen). Det kræves altså at $g_j(\mathbf{x}) = b_j$ svarende til de udvalgte, og i (b) er kravet, at $\lambda_j = 0$ svarende til de $m - k$ ikke-udvalgte. Fx, udvælges de første k bibetingelser, søges alle punkter $\mathbf{x}$, hvor enten gradienterne $\nabla g_j(\mathbf{x})$ for $j = 1, \dots, k$ er lineært afhængige eller hvor $g_j(\mathbf{x}) = b_j$ for $j = 1, \dots, k$ og $\lambda_j = 0$ for $j = k + 1, \dots, m$. (Desuden kræves naturligvis for alle j , at $g_j(\mathbf{x}) \leq b_j$ og $\lambda_j \geq 0$.) Bestemmelsen munder typisk ud i at man skal løse mange ikke-lineære ligninger med mange ubekendte. Der skal meget held til at bestemmelsen lykkes, med endelig mange løsninger!

Dette skal gøres for alle udvalg af bibetingelser, og for $k = 0, \dots, m$, altså for i alt 2^m udvalg. Hvis bestemmelsen ikke lykkes i ét af disse skridt, er det bare ærgerligt. Hvis den lykkes, har vi endelig mange kandidater til et maksimumspunkt, og så vælger vi et, der giver den største funktionsværdi; hvis et maksimumspunkt overhovedet eksisterer, så har vi fundet det.

• **Bemærk**, at der i Kuhn-Tucker’s betingelser (dvs (a) plus (b)) er $n + m$ ubekendte, nemlig n koordinater x_i i $\mathbf{x}$ og m koefficienter λ_j . I (a) indgår n ligninger, og når man undersøger (b), med k udvalgte bibetingelser som de aktive, kommer der yderligere m ligninger til, nemlig k ligninger $g_j(\mathbf{x}) = 0$ svarende til de aktive bibetingelser og $m - k$ ligninger $\lambda_j = 0$ svarende til de inaktive. Altså i alt $n + m$ ligninger i de $n + m$ ubekendte. Hertil kommer yderligere betingelser i form af uligheder. (Og så har vi endda set bort fra føringsbetingelsen.) For eksempel, i $\mathbb{R}^3$, med 20 bibetingelser, skal man ca 1 mill. gange løse 23 ligninger med 23 ubekendte. Det er selvfølgelig ikke nødvendigt, at angive λ_j ’erne, det er nok at indse, at de findes.

Planen for den 11te undervisningsuge, 18/11–22/11, omfatter Dualt program; kanonisk form [F §4, §5]. Øvelser: S4.13: **6** samt nedenstående:

Opgave 1. Betragt funktionen $h(x) := (x^2 - 1)^3$. (a) Afgør fortegnsvariationen for h . Bestem $h'(x)$, og afgør fortegnsvariationen. Afgør monotoniforholdene for h , bestem eventuelle lokale maksimums- eller minimumspunkter, og tegn grafen.

(b) Gennemfør KT-programmet for problemet: $\max 3x^2 + \frac{1}{2}y^2$ når $h(x) \leq y \leq 0$.

Opgave 2. Bestem mulige optimale basisløsninger til det lineære program på kanonisk matrixform med

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{c}^t := (1, 2, 1, -1).$$

Opgave 3. Bestem mulige optimale basisløsninger til det lineære program på kanonisk matrixform med

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{c}^t := (-1, 3, 0, 0).$$

Opgave 4. Bestem mulige optimale basisløsninger til det lineære program på kanonisk matrixform med

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{c}^t := (1, 1, 1).$$