

Ugeseddel 12.

Program. I ugen 18/11–22/11 er emnet dualt program og omformning til kanonisk form og standard form; Farkas' alternativ udsætter vi lidt, [F, §3, §4, §5]. Øvelser: US11: 1,2,3,4, samt S4.13: 6 til skriftlig aflevering.

Kuglerne.

• *Et lineært program* (et LP) er et optimeringsproblem, fx et maksimeringsproblem ($\max$) $f(\mathbf{x})$ for $\mathbf{x} \in S$, hvor *objektfunktionen* $f(\mathbf{x})$ er lineær, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^t \mathbf{x} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$, og hvor delmængden $S \subseteq \mathbb{R}^n$ er beskrevet ved bibetingelser, der er lineære ligninger og/eller lineære uligheder ($\leq$ eller $\geq$). Et program på *kanonisk form* (et KP) ser sådan ud:

$$(P) \quad (\max) \quad \mathbf{c}^t \mathbf{x} \quad \text{for } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Her er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et sæt af m givne lineære ligninger, svarende til en $m \times n$ -matrix A og en søjle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, og ulighed mellem vektorer er ulighed i hver koordinat: $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ betyder altså de n uligheder $x_j \geq 0$ for $j = 1, \dots, n$. Bibetingelserne er altså m ligninger og n uligheder.

Punkter/vektorer, der opfylder bibetingelserne, altså vektorer $\mathbf{x} \in S$, kaldes *tilladte løsninger*, og optimeringspunkter (maksimerings- eller minimerings-) kaldes *optimale løsninger*. Mængden S er afsluttet (hvorfor?) og konveks (hvorfor?). Den *maksimale værdi* af (P) er supremum over værdierne på de tilladte løsninger,

$$\sup(P) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}.$$

• Tre (måske fire) muligheder:

(1) $m := \sup(P) \in \mathbb{R}$ og $m = f(\mathbf{x}_0)$ med $\mathbf{x}_0 \in S$; her er $\mathbf{x}_0$ den søgte maksimale løsning.
 (2) $\sup(P) = \infty$; her kan $f(\mathbf{x})$, for $\mathbf{x} \in S$, antage vilkårlig store værdier. Det følger så, fx fordi f er lineær og S er konveks, at hvis v_0 er en funktionsværdi, $v_0 = f(\mathbf{x}_0)$ med $\mathbf{x}_0 \in S$, så er ethvert tal $v \geq v_0$ også en funktionsværdi.

(3) $\sup(P) = -\infty$; her er $S = \emptyset$. Det er blot en definition: supremum over en tom mængde er lig med $-\infty$. Vi skal senere [F, §6] se, at i det tredje tilfælde er der to muligheder for (P) .

Det er en vigtig pointe, at mulighed (0) fra ugeseddel 8 *ikke* kan indtræffe for et lineært program. [Det følger fx af dualitetssætningen [F, §6], men det er nu heller ikke så svært at vise det direkte, fx ved induktion efter antallet af variable.]

• *Basisløsninger* til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er løsninger $\mathbf{x}$, hvor søjlerne i A svarende til numre j , hvor $x_j \neq 0$, er lineært uafhængige. *Der er kun endeligt mange.*

For et kanonisk program (P) gælder: (a) Hvis der findes tilladte løsninger, så findes også en tilladt blandt basisløsningerne.

(b) Hvis der findes optimale løsninger, så findes også en optimal blandt de tilladte basisløsninger.

• Simplex-metoden løser i princippet det kanoniske program sådan:

1: Omform ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med rækkeoperationer til reduceret trappeform (echelonform). Herved afsløres det, hvis systemet ikke har løsninger. Antag, at systemet har løsninger. Bortkast eventuelt overflødige ligninger. Specielt gælder så, at antallet m af ligninger højst er lig med n , og at der er m lineært uafhængige søjler i A .

2: Et sæt lineært uafhængige søjler fra A kan altid udvides til et sæt af m lineært uafhængige søjler, se [Lineær Algebra]. Derfor fås basisløsningerne ud fra fremstillinger af $\mathbf{b}$ som

linearkombination af m lineært uafhængige søjler fra A (hvor nogle af koefficienterne kan være 0).

Gennemløb nu alle m -sæt af søjler i A . Afgør for hvert sæt først, om sættet er lineært uafhængigt. Hvis „ja“, fås en basisløsning $\mathbf{x}$, idet vektoren $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ jo så kan skrives som linearkombination af sættets søjler (ja, hvorfor nu det?). Hvis alle koefficienterne er ≥ 0 , er det en tilladt basisløsning; gem i så fald $\mathbf{x}$ og funktionsværdien $v = f(\mathbf{x})$.

3: Hvis der ikke blev fundet tilladte basisløsninger under gennemløbet, er $S = \emptyset$, og altså $\sup(P) = -\infty$. Ellers er den største af de gemte værdier, v_0 (og en tilsvarende tilladt basisløsning $\mathbf{x}_0$), kandidat som maksimumsværdi. For at fastslå, at v_0 er maksimumsværdien, altså $v_0 = \sup(P)$, skal muligheden $\sup(P) = \infty$ udelukkes.

4: Det kan i princippet afgøres ved at undersøge om det lineære program, der fås ved at tilføje ligningen $f(\mathbf{x}) = v$ med et $v > v_0$ (fx $v = v_0 + 1$) som yderligere bibetingelse, har tilladte løsninger (hvis „ja“, var v_0 jo ikke maksimum). Alternativt kan det undersøges om det duale program har tilladte løsninger, jfr [F, §6]. Endelig kan muligheden $\sup(P) = \infty$ straks udelukkes i en række tilfælde, fx når objektfunktionen har lutter negative koefficienter.

Det skal understreges, at den egentlige simplex-metode ikke bare gennemløber alle basisløsninger ved fra en basisløsning at vælge den næste i en på forhånd givet rækkefølge; i stedet vælges som den næste hele tiden en, som (lidt upræcist) giver den største forøgelse af objektfunktionen.

Planen for den 12te undervisningsuge, 25/11–29/11, er at afslutte den lineære programmering med Dualitetssætningen, [F, §5, §6]. Ugens opgaver er de efterfølgende tre opgaver:

Opgave 1. Betragt de tre programmer i opgaverne 2,3 og 4 på U 11. Afgør for hvert af dem, om der findes en optimal løsning, og angiv i bekræftende fald den optimale værdi.

Opgave 2. Betragt det generelle lineære program: $(P) \quad (\max) \quad 3x_1 + 5x_2$
for $x_1 + x_2 \leq 1$, $2x_1 + 2x_2 \leq 1$, $x_1 + 2x_2 \leq 0$, $-x_1 - x_2 \leq 0$, og ingen fortegnsskrav.

(a) Opstil det duale program (P') . Begrund, at det er på kanonisk form.

(b) Afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P') .

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til det duale program (P') .

(d) Løs det duale program (P') .

(e) Løs det oprindelige program (P) .

Opgave 3. Betragt det generelle lineære program:

$(P) \quad (\max) \quad -x_1 + x_2$ for
 $x_1 + x_2 \leq 1$, $3x_2 \leq -1$, $-x_1 - x_2 \leq 1$ og (ét fortegnsskrav) $x_1 \geq 0$.

(a) Opstil det duale program (P') , og afgør hvilket af Dualitetssætningens fire tilfælde, der omfatter (P) og (P') .

(b) Omform (P') til et program (Q) på kanonisk form.

(c) Bestem samtlige tilladte basisløsninger til programmet (Q) , og løs dette.

(d) Løs det duale program (P') .

(e) Løs det oprindelige program (P) .