

Ugeseddel 13.

Program. I ugen 25/11–29/11 afsluttes den lineære programmering med Dualitetssætningen, [F, §5, §6]. Ugens opgaver er U12: 1, 2, 3 (ingen skriftlig aflevering).

Kuglerne.

• *Standardform.* Et lineært program (et LP) har *standardform* (er et SP), hvis alle bibetingelser er uligheder, og alle variable skal være ≥ 0 . Et minimeringsproblem ændres til et maksimeringsproblem ved at skifte fortegn på objektfunktionen, og det kan antages, at uligheden i den i 'te bibetingelse har formen,

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad (*_i)$$

idet man ellers skifter fortegn på b_i og koefficienterne a_{ij} . Herefter kan et SP kort skrives:

$$(\max) \quad \mathbf{c}^t \mathbf{x} \quad \text{for } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

• *Et generelt program*, (et GP), *binder* kun nogle af de variable med et fortegnskrav $x_j \geq 0$, og tillader de øvrige at variere *frit*, og det tillader som bibetingelser både ligheder og uligheder. Antages, at alle uligheder i betingelserne har formen $\leq$ og at der søges maksimum, kan hele programmet anføres ultrakort, fx

$$(P) \quad (\max), \leq, \quad \begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^t & d \end{array},$$

idet man desuden med en $*$ markerer de rækker, der svarer til bibetingelser med ulighed, og de søjler, der svarer til variable med fortegnskrav.

• *Omformninger.* Et SP kan omformes til et kanonisk program (KP) ved at tilføje *restvariable*: Den i 'te ulighed $(*_i)$ ovenfor erstattes af en ligning,

$$u_i + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad (=i)$$

med fortegnskravet $u_i \geq 0$. Der er $m + n$ variable $(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n)$, alle ≥ 0 .

Et GP kan omformes til et SP ved at hver bibetingelse, der er en lighed, erstattes af to uligheder ($ax = b$ erstattes af $ax \leq b$ og $-ax \leq -b$), og hver fri variabel x_j erstattes af en differens $x_j = x'_j - x''_j$ med to bundne variable $x'_j, x''_j \geq 0$.

• *Rækkeoperationer.* Alternativt kan man med visse rækkeoperationer „forenkle“ et GP, og man kan omforme det til et SP, idet antallet af ligninger og variable samtidig formindskes. De tilladte operationer er, at en „ustjernet“ række, der jo svarer til en lighed (ligning), kan multipliceres med et vilkårligt tal $\lambda \neq 0$, og den kan lægges til enhver anden række. Sidste række i matricen svarer til objektfunktionen. Med et tal $d \neq 0$ i nederste højre hjørne underforstås i øvrigt, at objektfunktionen har formen $\mathbf{c}^t \mathbf{x} - d$. Hermed opnås, at man også til sidste række kan lægge et multiplum af en ustjernet række (uden at ændre objektfunktionens værdi på en tilladt løsning).

Hvis en af bibetingelserne er en ligning, og hvis fx x_n forekommer i denne ligning, så kan man med sådanne rækkeoperationer *eliminere* x_n fra de øvrige betingelser og fra objektfunktionen. Dette udnyttes sådan:

(1) Antag, at en fri variabel, fx x_n , forekommer i en ligning. Eliminer så x_n fra de øvrige ligninger og fra objektfunktionen. Put ligningen ind i skabet. Så resteret et problem med $m - 1$ bibetingelser og $n - 1$ variable. Når det er løst, kan den gemte ligning tages ud; den udtrykker x_n ved de øvrige variable.

(2) Antag, at en bunden variabel, fx x_n , forekommer i en ligning. Eliminer så x_n fra de øvrige ligninger og fra objektfunktionen, og put en kopi af ligningen ind i skabet. Variablen x_n kan opfattes som en restvariabel, og ligningen kan erstattes af den tilsvarende ulighed (uden x_n). Nu resteret m bibetingelser (idet ligningen blev erstattet med en ulighed), men kun $n - 1$ variable. Når det er løst, bestemmes x_n af den gemte ligning.

(3) Antag, at en fri variabel, fx x_n , forekommer i en ulighed. Uligheden ændres til en lighed ved at tilføje en (bunden) restvariabel u . Herefter elimineres x_n som i (1). Der resteret så $m - 1$ ligninger, og n variable (x_n forsvandt, men u kom til).

Efter endelig mange skridt fremkommer et SP. Er systemet fra begyndelsen et KP, er det kun skridt af typen (2), der kommer på tale; omformningen svarer til at bringe koefficientmatricen A på echelonform (reduceret trappeform).

• *Det duale program* (P'). Definitionen forudsætter, at (P) (et GP) er bragt på formen ovenfor, som maksimeringsprogram med alle uligheder af formen $\leq$. Så er (P') det GP, der fås ved at erstatte (max), $\leq$ med (min), $\geq$ og transponere:

$$(P) \quad (\max), \leq, \quad \begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^t & d \end{array}, \quad (P') \quad (\min), \geq, \quad \begin{array}{c|c} A^t & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{b}^t & d \end{array},$$

idet stjernerne følger med ved transponeringen: en række markeret med en $*$ bliver til en søjle markeret med $*$. Hovedsætning [F, Lemma 4.6 og Sætning 6.1]: *Hvis (P) har en tilladt løsning, så har (P) en optimal løsning, hvis og kun hvis (P') har en tilladt løsning; hvis „ja“, så er $\sup(P) = \inf(P')$*

• *Betingelse for maksimum.* Sætning 4.7 [F], for et standard maksimeringsprogram, bruges ofte på følgende form: *Antag, at $\mathbf{x}$ er en tilladt løsning til (P). Så er $\mathbf{x}$ en optimal løsning til (P), hvis og kun hvis der findes en vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ således, at følgende gælder:*

- (i) $\mathbf{y}$ er en tilladt løsning til (P'), dvs $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ og $\mathbf{y}^t A \geq \mathbf{c}^t$.
- (ii) $x_j > 0 \implies \mathbf{y}^t \mathbf{a}_j = c_j$,
- (iii) (den i 'te bibetingelse for $\mathbf{x}$ gælder med skarp ulighed) $\implies y_i = 0$.

Er de tre betingelser opfyldt, så er $\mathbf{y}$ en optimal løsning til (P'), og $\mathbf{y}^t \mathbf{b} = \mathbf{c}^t \mathbf{x}$.

For en given tilladt løsning $\mathbf{x}$ til (P) er det betingelser på $\mathbf{y}$. Hvis de kan opfyldes, så er $\mathbf{x}$ en optimal løsning til (P). Hvis $\mathbf{x}$ er en optimal løsning til (P), så kan betingelserne opfyldes, og en sådan vektor $\mathbf{y}$ er optimal løsning til (P').

Planen for den sidste undervisningsuge er at afholde en maratonsession den 2. december kl. 8.55-14.15 i lokale SPs12, med diskussion af gamle eksamensopgaver EO: 1, 18a), 37, 19, 38, 56, 46, 57, 58, 63, 4, 47, 59, 30, 36. Resten af ugen regner du nok obligatorisk hjemmeopgave.