

Ugeseddel 14.

Program. I den 13. uge afsluttes MASO med en maratonsession, mandag den 2. december kl. 8.55-14.15 i lokale SPs12. Her diskuteres følgende opgaver fra EO (gamle eksamensopgaver): 1, 18a), 37, 19, 38, 56, 46, 57, 58, 63, 4, 47, 59, 30, 36. Du får nok ikke ret meget ud af diskussionen, hvis du ikke har kigget på opgaverne i forvejen. Well, helt afsluttet er MASO vel først, når du får afleveret din besvarelsen af den obligatoriske hjemmeopgave. Den udleveres fra tirsdag den 3. december 2002 kl. 10.00 på MØK-sekretariatet. Besvarelsen afleveres på MØK-sekretariatet senest fredag den 6. december 2002 kl 10.00 (rettelse i forhold til U10).

Parlør.

‘retningsderiverte’ = retningsafledede

LP = lineært program

KP = kanonisk program = lineært program på kanonisk form

SP = standard program = lineært program på standardform,

GP = generelt (lineært) program,

Kuglerne.

- *Dualitetssætningen*, for et SP . Betragt et standard maksimeringsprogram og dets duale:

$$(P) \quad (\max), \quad SP, \leq, \quad \begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^t & 0 \end{array} \quad (P') \quad (\min), \quad SP, \geq, \quad \begin{array}{c|c} A^t & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{b}^t & 0 \end{array}$$

Øjensynlig er der 4 muligheder for mængderne $S \subseteq \mathbb{R}^n$ og $S' \subseteq \mathbb{R}^m$ af tilladte løsninger for (P) og (P') :

1° $S \neq \emptyset$, $S' \neq \emptyset$, 2° $S \neq \emptyset$, $S' = \emptyset$, 3° $S = \emptyset$, $S' \neq \emptyset$, 4° $S = \emptyset$, $S' = \emptyset$.

Det er let at se, at der i alle tilfælde gælder uligheden:

$$\sup(P) \leq \inf(P'); \quad (*)$$

i tilfælde 1° er det [F, Lemma 4.6], og i de øvrige tilfælde er uligheden aldeles trivial: fx, i tilfælde 3° er $\sup(P)$ pr definition lig med $-\infty$, og så er uligheden (*) jo opfyldt.

Dualitetssætningen [F, Sætning 6.1] udsiger: *Der gælder „i (*) på nær i tilfælde 4°, med den tilføjelse, at i tilfælde 1° antages de optimale værdier.*

Bemærk, at „i (*) ikke er trivielt, heller ikke i tilfældene 2° og 3°.

• *Farkas’ alternativ* er et specialtilfælde: hvad siger Dualitetssætningen for $\mathbf{c} = \mathbf{0}$? Objektfunktionen for (P) er konstant lig med 0, så $\sup(P) = 0$, med mindre $S = \emptyset$ og $\sup(P) = -\infty$. De tilladte løsninger for (P') er vektorerne $\mathbf{y}$ med $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ og $A\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Specielt ses, at $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ er en tilladt løsning, $\mathbf{0} \in S'$, og derfor er $S' \neq \emptyset$. Det må altså være enten tilfælde 1° (nemlig hvis $S \neq \emptyset$) eller tilfælde 3°. I det sidste tilfælde udsiger Dualitetssætningen, at $\inf(P') = -\infty$, altså at funktionen $\mathbf{b}^t\mathbf{y}$, for $\mathbf{y} \in S'$, kan antage vilkårligt små (negative) værdier. De to tilfælde svarer altså til følgende:

Enten findes en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, så $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, eller der findes en vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, så $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $A^t\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, og $\mathbf{b}^t\mathbf{y} < 0$.

Denne påstand er indholdet i Farkas’ alternativ, jfr [F, Sætning 3.2 og Lemma 6.2]. Beviset, der bygger på separationssætningen [S, s. 49], hører ikke med til pensum!

24. januar 2003

• *SP og KP.* Et standard maksimumprogram (P) kan omformes til et KP (Q) ved at tilføje en restvariabel for hver af de m uligheder, og et KP kan løses med „simplex-metoden“. Omvendt kan et KP først omformes til et KP, hvor matricen A har reduceret trappeform, med ledende 1-taller i de første m søjler, og det svarer til et SP i $n - m$ variable.

Bemærk, at tilladte basisløsninger til det kanoniske program (Q) nøje svarer til *hjørner* blandt de tilladte løsninger til standardprogrammet (P), hvor et hjørne defineres som en tilladt løsning $\mathbf{x}$ til (P), som opfylder n lineært uafhængige bibetingelser med lighed, heri medregnet eventuelle ligheder $x_j = 0$. I denne forstand består simplex-metoden i at gennemløbe hjørnerne i (P) og finde det hjørne (eller de hjørner), blandt de endelig mange hjørner, hvor objektfunktionen er størst mulig.

• *LP og Kuhn–Tucker.* Et (max) SP kan behandles med Kuhn–Tucker’s metode, idet fortegnskravene $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ opfattes som n bibetingelser, $-\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, på lige fod med de øvrige, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Der er altså m lineære bibetingelser $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$, svarende til rækkerne i A , og n bibetingelser $h_j(\mathbf{x}) \leq 0$, med $h_j(\mathbf{x}) = -x_j$. Objektfunktionen $f(\mathbf{x})$ og funktionerne g_i og h_j er lineære, og specielt både konvekse og konkave, så Lagrange-funktionen [S, Sætning 4.23] er med sikkerhed konkav. Gradienten ∇g_i er netop den i ’te række i A , og gradienten af h_j er en simpel sag (ikke sandt?). Det er indholdet af [F, Sætning 6.4], og let at vise, at Kuhn-Tucker’s tilstrækkelige betingelser netop svarer til betingelserne (i), (ii), og (iii) på US13.

Rettelser, i undervisningsmaterialet:

[GG] side 17: **subtraktion** $(-1) \mapsto$ **subtraktion** $(-)$

[GG] side 2⁹: $(187- \mapsto (287-$

[GG] side 9₉: ‘, for $n > M$ ’ $\mapsto$ ‘, for $n > N$ ’

[GG] side 31₆: $r_N \leq \mapsto r_N =$

[GG] side 39¹²: $(x_1 + x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

[GG] side 41₁₀: $|z_n| \mapsto |z^n|$

[GG] side 50⁵: $2^n m! \mapsto 2^n n!$

[S] side 83₉: ‘*deriverbar funksjon*’ $\mapsto$ ‘ C^1 -*funksjon*’

[S] side 84¹¹: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{f}'(\mathbf{x})$

[S] side 84₇: Fjern ‘dermed’ i sætningen ‘... er dermed enentydig ...’

[S] side 85_{5,4}: $\mathbf{f}'(x_1, x_2) \mapsto |\mathbf{f}'(x_1, x_2)|$

[F] side 4.4¹⁵: ‘og $\leq$ med $l \geq$.’ $\mapsto$ ‘og $\leq$ med $\geq$.’

[F] side 6.14: ‘Sætning 3.3’ $\mapsto$ ‘Sætning 3.2’

[F] side 6.2₁: $\hat{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$

Planen for resten af december, altså min egen plan, er at rette og bedømme de obligatoriske hjemmeopgaver. Jeg håber selvfølgelig, at det er overstået inden jul, men jeg tør kun love, at det kan ligge klar til den 2. januar. Det vil fremgå af hjemmesiden, når karakterne er givet.

Kursets fortsættelse til foråret, DOK (Differentialligninger og optimal kontrolteori), begynder i uge 1, med forelæsninger torsdag den 2. januar og fredag den 3. januar 2003, begge dage kl. 8.55–12.25 i lokale SPs07.

Tak for denne gang,
Anders Thorup