Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 2000

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 7 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1
(ca. 10 point)

Bestem integralerne

a) $\int (3x^7 + 4x^2 - 5)\,dx$

b) $\int (x+2)\cdot \sin(x^2 + 4x)\,dx$

Opgave 2
(ca. 15 point)

I planen er vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættet til vektoren $2\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$.

Bestem projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Bestem tallene x og y således, at
$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Bestem tallet t således, at vektoren $t\vec{a}+\vec{b}$ står vinkelret på vektoren $\vec{c}$.

Opgave 3
(ca. 15 point)

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad ; x \geq 0.$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} \qquad ; x \geq 2$$

Skitser graferne for de to funktioner i et koordinatsystem.

Graferne for de to funktioner, x-aksen og linjen med ligningen $x = 4$ afgrænser en punktmængde M.

Beregn arealet af M.

Når M drejes 360° om x-aksen fremkommer et omdrejningslegeme med form som en skal.

Beregn rumfanget af denne skal.

Opgave 4
(ca. 15 point)

For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er en lineær afbildning $f_a : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ givet ved matrixfremstillingen

$$f_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier af a, for hvilke afbildningen f_a har en invers afbildning f_a^{-1}.

Bestem for $a=2$ matrixfremstillingen for f_a^{-1}.

Opgave 5
(ca. 15 point)

Løs differentialligningen

$$y' + \frac{2x}{x^2+1} y = x^3.$$

Bestem specielt den løsning, der går gennem punktet (0,7).

Opgave 6
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er givet to planer α og β med ligningerne

α: $3x + y - 2z = 5$

β: $5x + 2y + z = 4$.

Vis, at α og β ikke er parallelle, og bestem en parameterfremstilling for deres skæringslinje.

Bestem toplansvinklen mellem α og β.

Punktet P har koordinatsættet $(-2,1,3)$.

Bestem projektionen af P på planen β.

Opgave 7
(ca. 15 point)

En vektorfunktion $\vec{f}(t)$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2+11t+10 \\ t^3-1 \end{pmatrix} ; \; t \in \mathbb{R}.$$

Bestem parameterværdierne til de punkter, hvori grafen skærer koordinatsystemets akser.

Bestem parameterværdierne til de punkter, hvori grafen har vandret eller lodret tangent.

Bestem parameterværdierne til de punkter, hvori hastighedsvektoren og accelerationsvektoren er parallelle.