Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1997

Geologisk anvendt matematik

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 5 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Bestem arealet af den trekant, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Opløs vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 2
(ca. 25 point)

En lineær afbildning f er givet ved matrixfremstillingen

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Find $f(\vec{v})$, hvor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Opgaven fortsætter.

Opgave 2, fortsat.

Bestem den vektor $\vec{u}$, der opfylder $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Tegn billedet af et kvadratnet afbildet ved f.

Gør rede for, at f har en invers afbildning f^{-1}, og bestem matrixfremstillingen for f^{-1}.

En anden lineær afbildning g er givet ved matrixfremstillingen

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning $g \circ f$.

Opgave 3
(ca. 20 point)

En vektorfunktion $\vec{f}$ er bestemt ved

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 \end{pmatrix} \; ; \quad t \in [-2;2] .$$

Grafen for $\vec{f}$ er den kurve, der har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 \end{pmatrix} \; ; \quad t \in [-2;2] .$$

Find parameterværdierne for grafens skæringspunkter med akserne.

Bestem disse skæringspunkter, og bestem hastighedsvektorerne i disse punkter.

Bestem de punkter, hvori grafen har vandrette eller lodrette tangenter.

Tegn grafen.

Find parameterværdierne for de punkter på grafen, hvor hastighedsvektoren danner en vinkel på 45° med x-aksen.

Opgave 4
(ca. 20 point)

I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne A(1,2,2), B(0,6,4) og C(3,3,1).

Bestem en ligning for den plan α, der indeholder A, B og C.

En linje ℓ er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Bestem skæringspunktet mellem ℓ og α.

Bestem vinklen mellem ℓ og α.

Opgave 5
(ca. 20 point)

I et koordinatsystem i planen er en linje ℓ givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Punkterne A og B har koordinatsættene A(0,3) og B(8,7). Med P_t betegnes det punkt på ℓ, der hører til parameterværdien t.

Bestem de værdier af t, som opfylder, at vinkel AP_tB er ret.

Bestem afstanden fra A til linjen ℓ.

Bestem en ligning for den linje, der går gennem A og står vinkelret på ℓ.