

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1 (ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen er givet punkterne $A(2,2)$, $B(4,5)$ og $C(7,1)$.

Beregn arealet af trekant ABC og gradtallet for vinkel A.

Vi sætter $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Bestem tallet t således, at vektoren $\vec{a} + t\vec{b}$ står vinkelret på vektoren $\vec{b}$.

Opgave 2 (ca. 20 point)

En plan α er bestemt ved, at den indeholder punkterne $A(1, -1, 1)$, $B(-3, -9, 1)$ og $C(2, -7, -1)$.

Bestem en ligning for planen α .

En linje ℓ går gennem punktet $P(6, 21, 10)$ og har retningsvektoren $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestem en parameterfremstilling for ℓ .

Bestem skæringspunktet mellem ℓ og α .

Bestem koordinatsættet til det punkt på ℓ , som har mindst afstand til punktet $Q(0, 5, 2)$.

Opgave 3
(ca. 20 point)

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er givet ved matrixfremstillingen

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tegn i et koordinatsystem billedet af kvadratet $[0;1] \times [0;1]$ ved afbildningen f .

Gør rede for, at f er bijektiv, og bestem en matrixfremstilling for den inverse afbildning f^{-1} .

En anden lineær afbildning $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ har matrixfremstillingen

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning $f \circ g$.

Bestem matrixfremstillingen for afbildningen $f+g$, og beskriv denne afbildning geometrisk.

Opgave 4
(ca. 15 point)

Det grafiske billede af funktionen

$f(x) = e^{2x} - 2e^x$
er skitseret på figuren.

Gør rede for, at grafen for f skærer x-aksen i punktet med koordinatsættet $(\ln(2), 0)$.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser et område M i 4. kvadrant.

Bestem arealet af M .

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om x-aksen.

Opgave 5
(ca. 20 point)

Der er givet differentialligningen

$$y'' + 6y' - 7y = -7x^2 + 19x + 24$$

Bestem løsningsmængden til den tilsvarende homogene ligning

$$y'' + 6y' - 7y = 0$$

Bestem et andengradspolynomium, der er løsning til den inhomogene ligning

$$y'' + 6y' - 7y = -7x^2 + 19x + 24$$

Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning, og bestem specielt den løsning, der går gennem linjeelementet $(0,3;9)$.

Opgave 6
(ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(2x+1)$$

Bestem dernæst den løsning, hvis graf går gennem punktet $(1,5)$.

Bestem sluttelig den løsning, hvis graf går gennem punktet $(1,1)$.