Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1998

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1
(ca. 10 point)

I et koordinatsystem i planen er givet punkterne A(2,2), B(4,5) og C(7,1).

Beregn arealet af trekant ABC og gradtallet for vinkel A.

Vi sætter $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Bestem tallet t således, at vektoren $\vec{a} + t\vec{b}$ står vinkelret på vektoren $\vec{b}$.

Opgave 2
(ca. 20 point)

En plan α er bestemt ved, at den indeholder punkterne
A(1,−1,1), B(−3,−9,1) og C(2,−7,−1).

Bestem en ligning for planen α.

En linje ℓ går gennem punktet P(6,21,10) og har retningsvektoren $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestem en parameterfremstilling for ℓ.

Bestem skæringspunktet mellem ℓ og α.

Bestem koordinatsættet til det punkt på ℓ, som har mindst afstand til punktet Q(0,5,2).

Opgave 3
(ca. 20 point)

En lineær afbildning $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ er givet ved matrixfremstillingen

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tegn i et koordinatsystem billedet af kvadratet [0;1]×[0;1] ved afbildningen f.

Gør rede for, at f er bijektiv, og bestem en matrixfremstilling for den inverse afbildning f^{-1}.

En anden lineær afbildning $g:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ har matrixfremstillingen

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning $f \circ g$.

Bestem matrixfremstillingen for afbildningen $f+g$, og beskriv denne afbildning geometrisk.

Opgave 4
(ca. 15 point)

Det grafiske billede af funktionen

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$$

er skitseret på figuren.

Gør rede for, at grafen for f skærer x-aksen i punktet med koordinatsættet (ln(2),0).

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser et område M i 4. kvadrant.

Bestem arealet af M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om x-aksen.

Opgave 5
(ca. 20 point)

Der er givet differentialligningen

$$y'' + 6y' - 7y = -7x^2 + 19x + 24$$

Bestem løsningsmængden til den tilsvarende homogene ligning

$$y'' + 6y' - 7y = 0$$

Bestem et andengradspolynomium, der er løsning til den inhomogene ligning

$$y'' + 6y' - 7y = -7x^2 + 19x + 24$$

Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning, og bestem specielt den løsning, der går gennem linjeelementet (0,3;9).

Opgave 6
(ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(2x+1)$$

Bestem dernæst den løsning, hvis graf går gennem punktet (1,5).

Bestem sluttelig den løsning, hvis graf går gennem punktet (1,1).