Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 1999

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1
(ca. 15 point)

Bestem integralerne

a) $\int (x^2 + 2\sqrt{x} - 3\ln x)\, dx$

b) $\int \frac{10x - 1}{x^2 - 3x - 10}\, dx$

Bestem tallet

c) $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

Opgave 2
(ca. 20 point)

To linjer i rummet er givet ved parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \; s \in \mathbb{R}$$

Bestem vinklen mellem de to linjer.

Opgave 2 fortsætter

Opgave 2, fortsat:

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer.

Bestem en ligning for den plan α, der fastlægges af de to linjer.

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planen α og x,y-planen (dvs. planen med ligningen z = 0).

Opgave 3
(ca. 20 point)

Bestem løsningsmængden til differentialligningen

(1) $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Bestem derefter den fuldstændige løsning til differentialligningen

(2) $y'' + 3y' - 4y = -8x^2 + 12x + 16$.

Bestem sluttelig den løsning til (2), som indeholder linjeelementet (0,-3,-4).

Opgave 4
(ca. 15 point)

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ er givet ved matrixfremstillingen

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bestem $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestem den vektor $\vec{u}$, der ved f afbildes på vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Gør rede for, at afbildningen f er invertibel (har en omvendt afbildning f^{-1}), og bestem matrixfremstillingen for f^{-1}.

Opgave 5
(ca. 15 point)

En funktion f af to variable x og y er givet ved

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x - 12y$$

Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Bestem de stationære punkter for f.

Bestem en ligning for grafens tangentplan gennem punktet (4,1,f(4,1)).

Opgave 6
(ca. 15 point)

Tre punkter P_t, Q og R i planen er givet ved:

$$P_t = (-1 + 2t,\ 2 + t)\ ,\quad Q = (5,4) \text{ og } R = (1,5).$$

Bestem de værdier af t, for hvilke $\overrightarrow{QP_t}$ står vinkelret på $\overrightarrow{RP_t}$.

Bestem den værdi af t, for hvilken $\overrightarrow{QP_t}$ er parallel med $\overrightarrow{RP_t}$.

Bestem de værdier af t, for hvilke trekant P_tQR har arealet 4.