Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, juni 2000

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1

(ca. 15 point)

En funktion $f(x)$ er givet ved

$$f(x) = x^2 - 4x$$

Tegn grafen for f.

Grafen for f og x-aksen afgrænser i 4. kvadrant et område M.

Bestem arealet af M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om x-aksen.

Opgave 2

(ca. 15 point)

En funktion f af to variable x og y er givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 + xy + 2$$

Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Bestem de stationære punkter for f.

Bestem en ligning for den tangentplan til grafen for f, som har røringspunktet $(2,-1,f(2,-1))$.

Opgave 3

(ca. 15 point)

Vi betragter tre 2×2-matricer **A**, **B** og **C**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Begrund hvilke af de tre matricer, der har en invers matrix, og bestem den inverse matrix, hvor det er muligt.

Bestem matricen $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$.

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ har matricen **B** som afbildningsmatrix:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestem billedet af vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ ved afbildningen f.

Bestem koordinatsættet for den vektor $\vec{u}$, der afbildes i vektoren $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 4

(ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 1)$$

Bestem derefter den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(1,2e)$.

Opgave 5

(ca. 25 point)

Bestem tallet k, således at funktionen

$$y = k \cdot e^{2x}$$

er løsning til differentialligningen

(1) $$y'' - 2y' - 35y = 70e^{2x}$$

Løs den tilsvarende homogene ligning

$$y'' - 2y' - 35y = 0$$

Angiv den fuldstændige løsning til ligningen (1).

Bestem den løsning f til (1), som opfylder $f(0) = 3$ og $f'(0) = 5$.

Opgave 6

(ca. 15 point)

I et koordinatsystem i rummet er en linje ℓ givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

Bestem projektionen af punktet $P(8,-1,5)$ på linjen ℓ.
Bestem afstanden fra ℓ til punktet P.
Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punktet P og linjen ℓ.