Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, juni 1998

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1

(ca. 15 point)

I planen er et område M i første kvadrant bestemt ved

$$M = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ og } 0 \leq y \leq \cos(x)+\sin(x) \}$$

Bestem arealet af M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om x-aksen.

Opgave 2

(ca. 15 point)

Løs differentialligningen

$$y'' + y' - y = 0 .$$

Bestem et andengradspolynomium, der er løsning til differentialligningen

$$y'' + y' - y = -x^2 + 2x - 3$$

og angiv derefter den fuldstændige løsning til denne ligning.

Opgave 3

(ca. 20 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = xy^2.$$

Bestem den løsning f, der opfylder f(0) = 1. Angiv definitionsmængden for f.

Bestem den løsning g, der opfylder g(0) = −1. Angiv definitionsmængden for g.

Opgave 4

(ca. 20 point)

Tre punkter i rummet er givet ved koordinatsættene

A(1,1,2), B(3,−1,5) og C(2,0,4).

Bestem arealet af trekant ABC.

Vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ udspænder et parallelogram.

Beregn længden af hver af diagonalerne i dette parallelogram.

Bestem en parameterfremstilling for den plan α, der indeholder punkterne A, B og C.

En anden plan β har ligningen

$2x - y + 3z = 5$.

Bestem den spidse toplansvinkel mellem α og β.

Opgave 5

(ca. 15 point)

En vektorfunktion $\vec{f}(t)$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2+3t \\ 2t+1 \end{pmatrix} ; \; t \in \mathbb{R}.$$

Bestem de punkter, hvori grafen skærer koordinatsystemets akser, og bestem hastighedsvektorerne i disse punkter.

Vis, at grafen har netop én lodret tangent, og bestem det kurvepunkt, hvori den lodrette tangent findes.

Opgave 6

(ca. 15 point)

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ er givet ved matrixfremstillingen

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestem $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gør rede for, at f har en omvendt afbildning f^{-1}, og bestem matrixfremstillingen for f^{-1}.

En anden lineær afbildning $g: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ har matrixfremstillingen

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning $f \circ g$.