

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1 (ca. 10 point)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen oplyses, at $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og at
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$.

Bestem koordinatsættet til vektoren $\vec{b}$.

Opgave 2 (ca. 15 point)

Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 8$$

Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i 4. kvadrant et område M .

Bestem arealet af M .

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring x -aksen.

Opgave 3
(ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

Bestem den løsning til ligningen, hvis graf går gennem punktet $(0,2)$.

Opgave 4
(ca. 20 point)

To linjer i rummet er givet ved parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; s \in \mathbb{R}$$

Bestem vinklen mellem de to linjer.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer.

Bestem en ligning for den plan α , der fastlægges af de to linjer.

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planen α og x,y -planen (dvs. planen med ligningen $z = 0$).

Opgave 5
(ca. 20 point)

En funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3$$

Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Bestem funktionens stationære punkter.

Bestem maksimum og minimum for f på kvadratet $[0;1] \times [0;1]$.

Opgave 6
(ca. 20 point)

En vektorfunktion $\vec{f}(t)$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ \frac{1}{2}t^3 - t \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestem de punkter, hvori grafen skærer koordinatsystemets akser, og bestem hastighedsvektorerne i disse punkter.

Bestem parameterværdierne til de punkter, hvori grafen har vandrette tangenter, og parameterværdierne til de punkter hvori grafen har lodrette tangenter.

Skitsér grafen.