Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, maj 1999

Matematik for geologer

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgavesættet består af 3 sider med i alt 6 opgaver.

Opgaverne ønskes besvaret med så mange mellemregninger og så megen forklarende tekst, at eksaminandens tankegang træder tydeligt frem.

Opgave 1
(ca. 10 point)

Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen oplyses, at $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og at

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \quad \text{og} \quad \vec{a} \cdot \hat{b} = 16 .$$

Bestem koordinatsættet til vektoren $\vec{b}$.

Opgave 2
(ca. 15 point)

Funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 8$$

Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i 4. kvadrant et område M.

Bestem arealet af M.

Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring x-aksen.

Opgave 3
(ca. 15 point)

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

Bestem den løsning til ligningen, hvis graf går gennem punktet (0,2).

Opgave 4
(ca. 20 point)

To linjer i rummet er givet ved parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \; t \in \mathbb{R}$$

og

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \; s \in \mathbb{R}$$

Bestem vinklen mellem de to linjer.

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem de to linjer.

Bestem en ligning for den plan α, der fastlægges af de to linjer.

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planen α og x,y-planen (dvs. planen med ligningen z = 0).

Opgave 5
(ca. 20 point)

En funktion $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$$

Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Bestem funktionens stationære punkter.

Bestem maksimum og minimum for f på kvadratet $[0;1]\times[0;1]$.

Opgave 6
(ca. 20 point)

En vektorfunktion $\vec{f}(t)$ er givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ \frac{1}{2}t^3 - t \end{pmatrix} ; \; t \in \mathbb{R}.$$

Bestem de punkter, hvori grafen skærer koordinatsystemets akser, og bestem hastighedsvektorerne i disse punkter.

Bestem parameterværdierne til de punkter, hvori grafen har vandrette tangenter, og parameterværdierne til de punkter hvori grafen har lodrette tangenter.

Skitser grafen.