Matematik for geologer

4 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 6 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen. Resultater opnået ved brug af lommeregnere eller computere kan kun indgå i besvarelsen, når det drejer sig om simple numeriske udregninger uden brug af programmering. Opgavesættet er på 2 sider.

Opgave 1

I rummet betragtes punkterne $P(2,3,4)$ og $Q(1,2,0)$, og linien l med parameterfremstillingen,

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lad m være linien gennem P og Q, og lad π være planen, der indeholder P og l.
(a) Bestem en parameterfremstilling for linien m.
(b) Bestem en ligning for planen π.
(c) Bestem cosinus til vinklen mellem π og m.

Opgave 2

Bestem følgende stamfunktioner:

$$\text{(i)} \quad \int \left(2e^{3x} - \tfrac{1}{2}x^2\right) dx\,, \qquad \text{(ii)} \quad \int \sin(2x+3)\, dx\,, \qquad \text{(iii)} \quad \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx\,.$$

Opgave 3

(i) Bestem en funktion $y = f(t)$, som opfylder betingelserne,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+1} \quad \text{og} \quad f(0) = 2.$$

(ii) I planen betragtes de to banekurver med parameterfremstillingerne,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}.$$

Begge kurver går gennem punktet $P(1,1)$, svarende til parameterværdien $t = 1$. Bestem cosinus til vinklen mellem de to kurvers tangentvektorer i dette punkt.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

Grafen for funktionen $f(x) = 2 - \cos x$ for $0 \leq x \leq \pi$ drejes en hel omgang (360°) omkring x-aksen. Bestem rumfanget af det fremkomne omdrejningslegeme.

Opgave 5

Betragt følgende differentialligning:

$$y'' - y = e^t.$$

(a) Vis, at funktionen $\frac{1}{2}te^t$ er en løsning til differentialligningen.
(b) Find en funktion $y = f(t)$, som er en løsning til differentialligningen og opfylder, at $f(0) = 0$ og $f'(0) = 1$.

Opgave 6

Betragt funktionen

$$f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 - x + y.$$

(a) Bestem de partielle afledede $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.
(b) Funktionen antager sit maksimum (dvs sin største værdi) i et punkt (x_0, y_0). Bestem dette punkt.