

Supplerende opgaver

De efterfølgende opgaver er supplerende opgaver til brug for undervisningen i Matematik for geologer. De er forfattet af Hans Jørgen Beck. Opgaverne falder i fire samlinger: Den indledende består af opgaver beregnet til diskussion i kursets første uge. Herefter følger del 1, der omhandler vektorer i planen, del 2, der supplerer opgaverne fra lærebogen VR, *Vektorer og rumgeometri*, og del 3, der supplerer opgaverne fra lærebogen ID, *Integralregning og differentiaalligninger*.

0. Opgaver til første uge.

Opgave 0.1. Hvad betyder det, at en funktion er differentiabel? Hvordan lyder en eksakt definition på differentiability? Hvad er betydningen af følgende begreber: differenskvotient? differentialkvotient? afledet funktion? Hvilke tolkninger kender du af differentialkvotienten for en funktion? Lav en tegning, der illustrerer forskellen mellem differenskvotient og differentialkvotient.

Kender du regnereglerne for at differentiere: en konstant funktion? en sum? en differens? et produkt? en kvotient? en sammensat funktion? en omvendt (invers) funktion?

Differentialkvotienten for en funktion i tallet x betegnes bl.a. $f'(x)$. Hvilke andre betegnelser kender du for differentialkvotienten (eller for den afledede funktion).

Bestem de afledede funktioner af følgende funktioner,

$$ax + b, \quad x^n, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \ln x, \quad e^x.$$

Opgave 0.2. En funktion f er givet ved

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}; \quad t \geq 0.$$

Undersøg f og dens graf med hensyn til monotoniforhold, ekstrema og asymptoter. Vis, at $t = 0$ er eneste nulpunkt for f . Tegn grafen for f i et koordinatsystem, hvor enheden på x -aksen (førsteaksen) er 1 cm (1 cm = 1) og enheden på y -aksen (andenaksen) er 10 cm (1 cm = 0,1).

Opgave 0.3. Brug regnereglerne for differentiation til at bestemme den afledede funktion $f'(x)$, når

$$(a) f(x) = \frac{1}{16}x^{16},$$

$$(b) f(x) = e^x \sin x,$$

$$(c) f(x) = \cos x \cdot \ln x,$$

$$(d) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x + 1},$$

$$(e) f(x) = \exp(2x^2 - 4x + 3),$$

$$(f) f(x) = \exp(g(x)),$$

hvor $g(x)$ er en differentiabel funktion.

Opgave 0.4. Der er givet funktionen

$$f(x) = e^{3x} - 2e^x; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestem det approksimerende førstegradspolynomium (spørgsmål: Hvad er det?) i punktet $(0, f(0))$.

Opgave 0.5. Undersøg – og tegn grafen for – funktionen

$$f(x) = \exp(-x^2 + 2x + 1).$$

Opgave 0.6. Fra gymnasiet kendes logaritmfunktionerne $\log x$ og $\ln x$. Funktionen $\ln$ er den såkaldt naturlige logaritme, mens $\log$ er logaritmfunktionen med grundtal 10. Det er den sidste funktion (der også kaldes 10-talslogaritmen), vi skal beskæftige os med her. Funktionen $\log x$ er defineret for *positive* værdier af x , og værdimængden er alle reelle tal. Videre er

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \quad \log(10) = 1.$$

Den første ligning gælder for alle logaritmfunktioner, den sidste er speciel for 10-talslogaritmen. Man kan vise, at der yderligere gælder følgende regneregler:

$$\log 1 = 0,$$

$$\log(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n,$$

$$\log(a/b) = \log a - \log b,$$

$$\log(a^x) = x \cdot \log a,$$

$$\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log a.$$

Logaritmfunktionen $\log$ blev oprindeligt opfundet/opdaget som et regneteknisk hjælpemiddel, og bevarede i mange sammenhænge denne position indtil ca. midten af 1970'erne, hvor

fremkomsten af lommeregnere og udbredelsen af datamater slog den ud. Forskellige logaritme-funktioner har imidlertid stadig kolossal betydning. I vil møde log i f.eks. kemien, (hvor den bl.a. bruges ved definitionen af pH-værdien for en væske), og I vil møde den naturlige logaritme $\ln$ senere på efteråret i forbindelse med integralregningen.

Begge funktioner har omvendte (inverse) funktioner, som er eksponentialfunktioner. Den omvendte til $\log x$ er 10^x , og den omvendte til $\ln x$ er e^x .

Og så til selve opgaven: Med 2 decimalers nøjagtighed gælder om 10-talslogaritmen, at $\log 2 = 0,30$, $\log 3 = 0,48$. Desuden gælder (som nævnt) $\log 10 = 1$. Brug regnereglerne for logaritme-funktioner til udfra disse værdier at udregne:

$$\log 4, \quad \log 5, \quad \log 6, \quad \log 9, \quad \log 15, \quad \log(3/2), \quad \log 100, \\ \log(150), \quad \log(1500), \quad \log(0,75), \quad \log(2,25), \quad \log(1/2), \quad \log \sqrt{2}.$$

Opgave 0.7. Løs ligningerne

$$\log(3x) = 0,4711, \quad \log x = -0,1448, \quad \log(2x + 1) = 3,1639.$$

Opgave 0.8. Løs ligningen

$$\log x^2 - \log(x - 3) = 7 \log 2 - \log 8.$$

Opgave 0.9. Løs ligningerne

$$4 \cdot 1^x = 12,47, \quad 2,7 \cdot 1,57^x = 7,92, \\ 6,2 \cdot 3,4^x = 2,8 \cdot 1,2^x, \quad 3,7^{2x} - 9 \cdot 3,7^x + 14 = 0.$$

Opgave 0.10. Løs ligningssystemet

$$2^x 3^y = 72, \quad 3^x 2^y = 108.$$

Opgave 0.11. Brug potensregnereglerne til at udregne følgende tal. Check evt. med lommeregneren. Hvad er nemmest?

$$\frac{4^{-3} \cdot 5^{-3}}{10^{-3}}, \quad \frac{4^{-2} \cdot 5^{-2}}{100^{-2}}, \quad \frac{(-4)^{-1} \cdot (-5)^{-1}}{(-1000)^{-1}}, \\ \frac{2^{-1} \cdot 3^{-1}}{6^{-1}}, \quad \frac{2^{-2} \cdot 3^{-3}}{6^{-3}}, \quad \frac{2^{-3} \cdot 3^{-1}}{6^{-2}}.$$

Opgave 0.12. Reducér udtrykket

$$\frac{(a^{-2})^3 - a \cdot a^{-2} \cdot a^{-3}}{(a^2)^3 - a^{-2} \cdot a^3} = (a^3)^{-2} \cdot a^{-2}/a^{-3}.$$

Opgave 0.13. Reducér udtrykket

$$\frac{((ab)^n \cdot a^p)^q \cdot b^{-n}}{(a/b)^n \cdot (a^{-p})^{-q} \cdot a^{-n}}.$$

Opgave 0.14. Reducer udtrykket

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdots \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}.$$

Opgave 0.15. Fire tal, a , b , c og d , er forbundet ved ligningen

$$a - b = \frac{c}{d}.$$

Isolér hvert af de fire tal a , b , c , d (dvs omskriv ligningen, så hhv. a , b , c , og d kommer til at stå alene på den ene side af lighedstegnet).

Opgave 0.16. Fem tal, a , b , c , d og e , er forbundet ved ligningen

$$a = b + \frac{\log(c/d)}{e}.$$

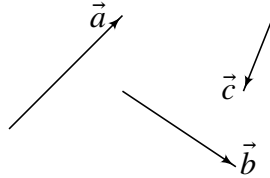
Isolér hvert af tallene b , c , d og e .

Opgave 0.17. Løs ligningen

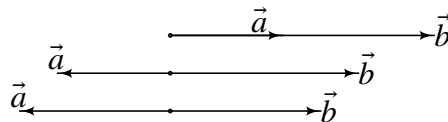
$$\log(\log 10x) + \log(\log x^5) = 1.$$

1. Supplerende opgaver om vektorer i planen.

Opgave 1.1. Nedenfor er tegnet vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Tegn vektorerne $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Opgave 1.2. Indtegn summen af de nedenfor tegnede vektorer (afsat med samme begyndelsespunkt).



Opgave 1.3. Betragt igen vektorerne fra opgave 1. Indtegn vektorerne

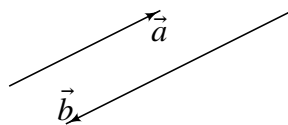
$$\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

Opgave 1.4. Tegn følgende vektorer ud fra vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ i opgave 1:

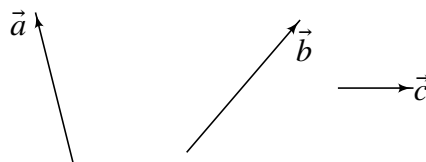
$$2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 3\vec{c}, \quad 2\vec{b} - 3\vec{a} - 2\vec{c}, \quad \vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{c}),$$

$$4(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}) - 2(\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}).$$

Opgave 1.5. Der er givet følgende to parallelle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Bestem ved måling med en lineal et tal k_1 således, at $\vec{a} = k_1\vec{b}$ og et tal k_2 således, at $\vec{b} = k_2\vec{a}$.



Opgave 1.6. Tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er tegnet herunder:



Opgaven går ud på ved *konstruktion* at opløse $\vec{c}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{b}$, dvs at konstruere to vektorer $\vec{a}_1$ og $\vec{b}_1$ således, at $\vec{a}_1$ er parallel med $\vec{a}$, $\vec{b}_1$ er parallel med $\vec{b}$ og $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$. Opløs derefter $\vec{b}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{c}$, samt $\vec{a}$ efter $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

Opgave 1.7. Tegn på et stykke kvadreret papir vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ med koordinaterne

$$\vec{a} = (2, 1), \quad \vec{b} = (-3, 1), \quad \vec{c} = (16, -2).$$

Find koordinaterne for følgende vektorer:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \quad 3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \quad -4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}.$$

Bestem tal x , y således, at

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

(Bemærk, at dette svarer til at opløse $\vec{c}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{b}$, jfr sætningen side VR15.)

Opgave 1.8. Der er givet punkterne $A = (1, 3)$, $B = (5, 6)$, $C = (6, 1)$, og $D = (-1, -2)$. Find koordinaterne til $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ og $\overrightarrow{DA}$, og vis, at

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$$

Opgave 1.9. I parallelogrammet $ABCD$ er $A = (-2, -2)$, $B = (-1, 3)$ og $D = (5, 1)$. Tegn en skitse, og find ved beregning koordinaterne til C .

Opgave 1.10. I parallelogrammet $ABCD$ er $A = (3, 2)$, $B = (5, 5)$ og $\overrightarrow{AC} = (8, 2)$. Find koordinaterne til hjørnerne C og D . Tegn parallelogrammet.

Opgave 1.11. Find længden af følgende vektorer:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (3, -4), \quad \vec{b} = (2, 1), \quad \vec{c} = (-4, 6), \quad \vec{d} = (-8, 6), \\ \vec{e} &= (2\sqrt{2}, -\sqrt{3}), \quad \vec{f} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \vec{g} = (1, 1), \quad \vec{h} = (-5, 0). \end{aligned}$$

Opgave 1.12. Ofte er det bekvemt at kunne bestemme en enhedsvektor $\vec{e}$ parallel med en given vektor $\vec{a}$. Dette lader sig gøre ved at dividere $\vec{a}$ med sin egen længde $|\vec{a}|$ (derved bliver enhedsvektoren $\vec{e}$ ensrettet med $\vec{a}$) eller med $-|\vec{a}|$ (hvorved $\vec{e}$ bliver modsat rettet $\vec{a}$). Bestem enhedsvektorer, der har samme retning som følgende vektorer:

$$\vec{a} = (-3, 4), \quad \vec{b} = (3, 1), \quad \vec{c} = (-2, -3),$$

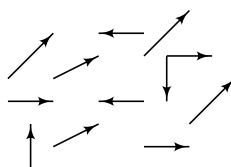
og bestem enhedsvektorer, der har retning modsat af følgende vektorer:

$$\vec{d} = (11, -2), \quad \vec{f} = (-5, 12), \quad \vec{g} = (2, 4).$$

Opgave 1.13. Givet vektorerne $\vec{a} = (-3, -1)$ og $\vec{b} = (2, -3)$. Bestem en enhedsvektor, som er ensrettet med $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Bestem en vektor som er ensrettet med $\vec{a}$ og har længden 8. Bestem en vektor, som modsat rettet af $\vec{b}$ og har længden $5\sqrt{13}$.

Opgave 1.14. I parallelogrammet $ABCD$ er (1) $A = (-2, 1)$, (2) $\vec{AB}$ er ensrettet med $\vec{v} = (1, 1)$ og har længden $4\sqrt{2}$, (3) $\vec{BC}$ er ensrettet med $\vec{u} = (3, -1)$ og har længden $3\sqrt{10}$. Find koordinaterne til punkterne B , C og D . Tegn parallelogrammet.

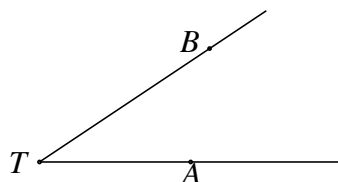
Opgave 1.15. Hvor mange vektorer er der repræsentanter for på denne figur?



Opgave 1.16. Lad A og B være to forskellige punkter. Beskriv mængder af de punkter P for hvilke:

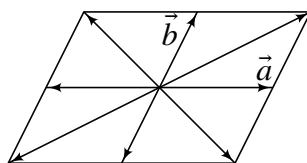
(1) $\vec{AP}$ er parallel med $\vec{BP}$. (2) $\vec{AP}$ og $\vec{BP}$ er ensrettede. (3) $\vec{AP}$ er vinkelret på $\vec{BP}$. (4) $\vec{AP}$ er lig med $\vec{PB}$. (5) $\vec{AP}$ er lig med $\vec{BP}$. (6) $|\vec{AP}|$ er lig med $|\vec{BP}|$. (7) $\vec{AP}$ er en enhedsvektor. (8) Vinklen mellem $\vec{AB}$ og $\vec{AP}$ er 45° .

Opgave 1.17. Givet en vinkel med toppunkt T og punkterne A og B på hvert ben:



Konstruér punktet P således, at $\vec{TP} = \vec{TA} + \vec{TB}$.

Opgave 1.18. I et parallelogram tegnes 8 vektorer ud fra diagonalernes skæringspunkt:



Udtryk de andre vektorer ved vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 1.19. Der er givet vektorerne $\vec{a} = (4, -3)$, $\vec{b} = (-1, 3)$ og $\vec{c} = (2, 1)$. Bestem de skalære produkter $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$ og $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Bestem vektorerne $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ samt $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{c}$.

Opgave 1.20. Givet vektoren $\vec{a} = (2, 4)$. Afgør hvilke af følgende vektorer, der står vinkelret på $\vec{a}$:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= (-6, 4), & \vec{c} &= (-2, 1), & \vec{d} &= (-3, -1), \\ \vec{e} &= (5, -2), & \vec{f} &= (16, -8), & \vec{g} &= (-15, 8).\end{aligned}$$

Opgave 1.21. For ethvert reelt tal k er der ved $\vec{a} = (k, 2)$ og $\vec{b} = (3, 2k - 14)$ bestemt to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Find $\vec{a} \cdot \vec{b}$ udtrykt ved k . Find de værdier af k for hvilke $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Opgave 1.22. Givet vektorerne $\vec{a} = (2k - 1, k)$ og $\vec{b} = (k, k + 4)$. For hvilke værdier af k er $\vec{a} \perp \vec{b}$?

Opgave 1.23. Tre punkter A , B og C er givet ved deres koordinater. Afgør om trekant ABC er retvinklet, når

- 1) $A = (1, 1)$, $B = (9, -1)$, $C = (5, 7)$,
- 2) $A = (-8, 11)$, $B = (-1, -2)$, $C = (9, 3)$,
- 3) $A = (-4, -3)$, $B = (-1, -4)$, $C = (1, 11)$,
- 4) $A = (2, -4)$, $B = (4, 6)$, $C = (-11, 9)$.

Opgave 1.24. Find koordinaterne til tværvektorerne til for følgende vektorer:

$$\vec{a} = (5, 4), \quad \vec{b} = (2, -7), \quad \vec{c} = (-3, -5), \quad \vec{d} = (-1, 2).$$

Tegn i hvert tilfælde vektoren og dens tværvektor.

Opgave 1.25. Givet vektorerne $\vec{a} = (2, -1)$ og $\vec{b} = (-7, 7/2)$. Find $\hat{a}$. Find $\hat{a} \cdot \vec{b}$. Hvad kan man sige om retningerne af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ på grundlag af værdien af $\hat{a} \cdot \vec{b}$?

Opgave 1.26. Bestem de værdier af a , for hvilke vektorerne $\vec{a} = (a+4, a)$ og $\vec{b} = (9, 2a-1)$ er parallelle.

Opgave 1.27. Find ligningen for den rette linie i planen, der er bestemt ved normalvektoren $\vec{n}$ og punktet P_0 , når

- 1) $\vec{n} = (2, 3)$, $P_0 = (1, 4)$,
- 2) $\vec{n} = (-1, 2)$, $P_0 = (-3, -1)$,
- 3) $\vec{n} = (0, 1)$, $P_0 = (4, 2)$,
- 4) $\vec{n} = (2, -5)$, $P_0 = (3, -1)$,
- 5) $\vec{n} = (-1, -7)$, $P_0 = (2, 0)$.

Opgave 1.28. Find ligningen for linien med hældningsvektoren $(2, -1)$ gennem punktet $(3, 4)$.

Opgave 1.29. Trekant ABC er bestemt ved

$$A = (-1, 2), \quad B = (1, 6), \quad C = (4, 4).$$

Find ligningerne for de linier, der indeholder trekantens sider. Find sidernes længder. Find ligningen for den linie, der går gennem B og står vinkelret på linien gennem A og C . Find denne linies skæringspunkt P med linien gennem A og C . Find længden af AP . Find sluttelig trekantens areal T (Benyt formelen $T = \frac{1}{2}hg$, hvor h er en højde i trekanten og g er den tilsvarende grundlinie).

2. Supplerende opgaver til VR.

Opgave 2.1. Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(1) Bestem koordinaterne til vektoren $4\vec{a} - 2\vec{b}$. (2) Bestem tallet $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (3) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. (4) Bestem arealet af det parallelogram, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$. (5) Bestem koordinatsættet til $\vec{a}$'s projektion på $\vec{b}$.

Opgave 2.2. Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}$. Find de værdier af k , for hvilke $\vec{a} + \vec{b}$ er parallel med $\vec{c} + \vec{d}$.

Opgave 2.3. I et koordinatsystem i planen er givet punkterne $P(3, -4)$ og $Q(5, 1)$. Trekant ABC er bestemt ved, at $A = (-2, 7)$ og

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PQ} + \widehat{PQ}$$

(symbolet $\widehat{PQ}$ står for tværvektoren til $\overrightarrow{PQ}$). Bestem koordinaterne til B og C . Bestem en parameterfremstilling for den linie, der indeholder punkterne B og C .

Opgave 2.4. I rummet er givet et koordinatsystem. Punkterne A og B er bestemt ved koordinatsættene $A(1, 2, -2)$ og $B(3, -1, 4)$. Bestem en parameterfremstilling for linien gennem A og B .

Opgave 2.5. I en orienteret plan er der givet en egentlig vektor $\vec{v}$. Om en firkant $ABCD$ gælder, at $\overrightarrow{AB} = 2\vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = 3\vec{v}$, $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, og projektionen af $\overrightarrow{AD}$ på $\overrightarrow{AB}$ er lig med $-\vec{v}$. Tegn en egentlig vektor $\vec{v}$, og tegn ud fra den valgte vektor en skitse af firkant $ABCD$. Bestem $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{CD}$ udtrykt ved $\vec{v}$ og $\widehat{v}$. Bestem gradtallet af vinklen mellem $\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{CD}$.

Opgave 2.6. I et koordinatsystem er givet punkterne $A(-1, 7)$ og $B(2, 6)$. Videre er D et punkt, om hvilket det gælder, at $\overrightarrow{AD} = -3\vec{v}$, hvor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Find koordinatsættet for D . En linie ℓ har parameterfremstillingen

$$x = 1 + t, \quad y = -4 + 2t,$$

hvor t betegner et reelt tal. Med P_t betegnes det til t hørende punkt på ℓ . Bestem de tal t , om hvilke det gælder, at vinkel BP_tD er ret.

Opgave 2.7. To linier l og m er givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m .

Opgave 2.8. Bestem en ligning for den plan π , der indeholder punkterne $A(4, 2, 1)$, $B(3, 1, 0)$ og $C(6, 1, 1)$. En linie l er givet ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og π .

Opgave 2.9. En kugle har centrum i $C(-3, 1, 1)$ og går gennem $P(1, 2, 1)$. Bestem en ligning for kuglen. Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen i P .

Opgave 2.10. Gør rede for, at de to linier l og m givet ved parameterfremstillingerne

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

er vindskæve. Bestem afstanden mellem l og m og bestem vinklen mellem l og m .

Opgave 2.11. En lineær afbildning f er givet ved matrixfremstillingen

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x},$$

og vektoren $\vec{v}$ er givet ved $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Bestem $f(\vec{v})$. Bestem den vektor $\vec{u}$, der opfylder, at $f(\vec{u}) = \vec{v}$. Tegn billedet af et kvadratnet ved afbildningen f . En anden lineær afbildning g er givet ved matrixfremstillingen

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x},$$

Gør rede for, at g er bijektiv, og bestem matrixfremstillingen for den omvendte afbildning g^{-1} . Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning $g \circ f$.

Opgave 2.12. En kurve er givet som graf for vektorfunktionen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}; \quad t \in [-2; 2].$$

Bestem kurvens skæringspunkter med koordinatsystemets akser. Bestem de punkter, hvor kurven har lodret tangent. Tegn kurven.

Opgave 2.13. I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestem arealet af den trekant, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$. Opløs vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 2.14. En lineær afbildning f er givet ved matrixfremstillingen

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Find $f(\vec{v})$, hvor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestem den vektor $\vec{u}$, der opfylder $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \end{pmatrix}$. Tegn billedet af et kvadratnet afbildet ved f . Gør rede for, at f har en invers afbildning f^{-1} , og bestem matrixfremstillingen for f^{-1} . En anden lineær afbildning g er givet ved matrixfremstillingen

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bestem matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning $g \circ f$.

Opgave 2.15. En vektorfunktion $\vec{f}$ er bestemt ved

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 \end{pmatrix}; \quad t \in [2; 2].$$

Grafen for $\vec{f}$ er den kurve, der har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ t^2 \end{pmatrix}; \quad t \in [-2; 2].$$

Find parameterværdierne for grafens skæringspunkter med akserne. Bestem disse skæringspunkter, og bestem hastighedsvektorerne i disse punkter. Bestem de punkter, hvori grafen har vandrette eller lodrette tangenter. Tegn grafen. Find parameterværdierne for de punkter på grafen, hvor hastighedsvektoren danner en vinkel på 45° med x -aksen.

Opgave 2.16. I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne $A(1, 2, 2)$, $B(0, 6, 4)$ og $C(3, 3, 1)$. Bestem en ligning for den plan α , der indeholder A , B og C . En linie ℓ er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestem skæringspunktet mellem ℓ og α . Bestem vinklen mellem ℓ og α .

Opgave 2.17. I et koordinatsystem i rummet er en pyramide $ABCDE$ givet ved koordinaterne $A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(4, 4, 0)$, $D(0, 4, 0)$ og $E(2, 2, 8)$. Bestem alle toplansvinkler i pyramiden. Bestem ligningen for den omskrevne kugle (dvs kuglen, som går gennem de nævnte punkter).

3. Supplerende opgaver til ID.

Opgave 3.1. Bestem integralet

$$\int (x^2 + \frac{1}{3x}) dx.$$

Bestem tallet

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

Opgave 3.2. Bestem integralerne

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int (2x^3 - 4x - 3 \cos x) dx, & \text{b)} \quad & \int x^2 \sin x dx, \\ \text{c)} \quad & \int x \sin(x^2) dx. \end{aligned}$$

Bestem tallet

$$\int_1^{10} (x+1)\sqrt{3x^2+6x-5} dx.$$

Opgave 3.3. Bestem integralerne

$$\int (3x^2 + 4x - \sin x) dx \quad \text{og} \quad \int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx.$$

Opgave 3.4. Bestem integralet $\int (\sqrt{3x+1})^{-1} dx$ og derefter tallet $\int_1^8 (\sqrt{3x+1})^{-1} dx$.

Opgave 3.5. Bestem integralerne

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int (x^5 - 3x^2 + 2x - 1) dx, & \text{b)} \quad & \int x e^x dx, \\ \text{c)} \quad & \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx. \end{aligned}$$

Bestem tallet

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(2x+1) \cos(2x+1) dx.$$

Opgave 3.6. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Skitsér grafen for f i et koordinatsystem. Førsteaksen (x -aksen) og grafen for f afgrænser i fjerde kvadrant et område M . Beregn arealet af M . Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om x -aksen.

Opgave 3.7. En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}; \quad x > 0.$$

Grafen for f , x -aksen og linierne med ligningerne $x = 1$ og $x = 4$ afgrænser en punktmængde M . Beregn arealet af M . Beregn rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om x -aksen.

Opgave 3.8. En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{-x} + \ln x.$$

Det oplyses, at grafen for f i intervallet $[1; 2]$ ligger over x -aksen. Grafen for f , x -aksen og linierne med ligningerne $x = 1$ og $x = 2$ afgrænser et område M . Beregn arealet af M . En anden funktion g er for $x \geq -1$ givet ved

$$g(x) = x\sqrt{x+1}.$$

Grafen for g , koordinatsystemets akser og linien med ligningen $x = 1$ afgrænser et område, der drejes 360° om x -aksen. Beregn volumenet af det derved fremkomne omdrejningslegeme.

Opgave 3.9. To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 8x - 13, \quad g(x) = x^2 - 6x + 7.$$

Skitsér graferne for f og g i et koordinatsystem. De to grafer afgrænser et område, der har et areal. Beregn dette areal. Grafen for g , koordinatsystemets akser og linien med ligningen $x = 1$ afgrænser et område M . Når M drejes 360° om x -aksen fremkommer et omdrejningslegeme. Beregn rumfanget af dette omdrejningslegeme.

Opgave 3.10. Bestem ved dekomposition (dvs ved opskrivning af integranden som sum af partialbrøker) integralet:

$$\int_0^1 \frac{2x-3}{x^2-5x+6} dx.$$

Opgave 3.11. Bestem tallet

$$\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx.$$

Opgave 3.12. Løs differentiaalligningen

$$y' + 3xy = x.$$

Bestem den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(0, 4)$.

Opgave 3.13. Bestem den fuldstændige løsning til hver af differentiaalligningerne

$$\text{a) } y' - xy = 0, \quad \text{b) } y' - 3y = 2.$$

Opgave 3.14. Bestem den løsning til differentiaalligningen

$$y' - 3y = x + 2,$$

som opfylder $y(0) = -1$.

Opgave 3.15. Løs enhver af ligningerne

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & y' + y = t + 1, \\ \text{b)} & y' + y = \cos t, \\ \text{c)} & y' + y = e^t, \\ \text{d)} & y' + y = e^{-t}. \end{array}$$

Opgave 3.16. Løs for $t \neq 0$ ligningen

$$ty' + y = 4t^3.$$

Er de fundne løsninger gyldige også for $t = 0$?

Opgave 3.17. Løs ligningen

$$y' + \frac{1}{x+2}y = 4.$$

Opgave 3.18. Løs differentialligningen

$$y' + (\tan x)y = 2 \sin x, \text{ for } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Opgave 3.19. Løs ligningen

$$(2 + \sin x)y' + (\cos x)y = \sin^2 x.$$

[Vink: $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$.] Bestem den løsning, som opfylder $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Ekstraopgave til de ivrige: Bevis vinket! [Vink: Brug bl.a. formlen $2 \cos x \sin x = \sin 2x$.]

Opgave 3.20. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Bestem endvidere den løsning, der indeholder linieelementet $(0, 3, 4)$, dvs opfylder $y(0) = 3$ og $y'(0) = 4$.

Opgave 3.21. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Opgave 3.22. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$2y'' - 6y' + 5y = 0.$$

Opgave 3.23. Vis, at funktionen $f(x) = -3x^2 + x + 19$ er løsning til differentialligningen

$$2y'' + 5y' - 3y = 9x^2 - 33x - 64.$$

Bestem derefter den fuldstændige løsning til denne ligning.

Opgave 3.24. Vis, at funktionen $f(x) = \cos x + 3 \sin x$ er løsning til differentialligningen

$$y'' - 3y' + 9y = -\cos x + 27 \sin x. \quad (*)$$

Bestem den fuldstændige løsning til (*). Bestem de løsningskurver til (*), der går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt. Bestem den løsning, hvis graf går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt, og som opfylder $y'(0) = 3$.

Opgave 3.25. Løs differentialligningen

$$y''' - y'' - 2y' = 0.$$

[Vink: Sæt $z := y'$. Bestem først z og dernæst y .]

Opgave 3.26. Find den fuldstændige løsning til hver af differentialligningerne

$$\text{a) } y'' + 3y' - 4y = 0, \quad \text{b) } y'' + 10y' - y = 0.$$

Opgave 3.27. Løs hver af differentialligningerne

$$\text{a) } y'' = 4y, \quad \text{b) } y'' = -4y.$$

Opgave 3.28. Bestem konstanten a således, at funktionen $f(x) = ae^x$ er løsning til differentialligningen

$$y'' + 4y = e^x.$$

Løs derefter ligningen. [Vink: Brug resultatet fra opgave 27b.]

Opgave 3.29. Bestem tallene a , b og c således, at andengradspolynomiet $ax^2 + bx + c$ er løsning til ligningen

$$y'' - 4y = 8x^2 - 2x.$$

Bestem derefter den fuldstændige løsning. [Vink: Brug opgave 27a.]

Opgave 3.30. Find den løsning til differentialligningen

$$y'' - 2y' + y = x,$$

der opfylder $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Opgave 3.31. Find den løsning $y(t)$ til differentialligningen

$$y''(t) + 4y(t) = 1 + t^2,$$

der opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 1$ og $y'(0) = 2$.

Opgave 3.32. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2.$$

Bestem specielt den løsning, der opfylder $y(1) = -1$.

Opgave 3.33. Bestem for $x > -2$ den løsning til differentialligningen

$$y' + \frac{1}{x+2} y = 3x - 2$$

som opfylder $y(2) = 3$.

Opgave 3.34. Bestem tallene a og b således, at funktionen $h(x) = a \cos x + b \sin x$ er løsning til differentialligningen

$$y'' + 6y' + 9y = 20 \cos x + 10 \sin x.$$

Bestem herefter den fuldstændige løsning til denne ligning.

Opgave 3.35. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Bestem den løsning, hvis graf går gennem punktet $P(1, 2)$. Bestem den løsning, hvis graf går gennem punktet $Q(1, 0)$. Bestem den løsning, hvis graf går gennem punktet $R(1, -2)$.

Opgave 3.36. Løs differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4}{e^y}.$$

Bestem den løsning $y = f(x)$, som opfylder $f(2) = 0$.

Opgave 3.37. Løs for $x > -1$ differentialligningen

$$y' + \frac{1}{x+1} y = \sin x.$$

Opgave 3.38. Løs differentialligningen

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Bestem derefter den fuldstændige løsning til ligningen

$$y'' + 3y' - 4y = -7 \cos x - 11 \sin x.$$

Opgave 3.39. Bestem tallene a , b og c således, at funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ er løsning til differentialligningen

$$y'' + 2y' + 3y = 6x^2 + 11x + 3.$$

Bestem den fuldstændige løsning til denne differentialligning.

Opgave 3.40. Løs differentialligningen

$$y' + 2xy = x.$$

Bestem den løsningskurve, der går gennem $(0, 3)$.

Opgave 3.41. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x.$$

Bestem den løsning, som opfylder $y(0) = 1$. Bestem den løsning, som opfylder $y(0) = 0$.

Bestem den løsning, som opfylder $y(\frac{\pi}{2}) = -2$.

Opgave 3.42. Løs differentialligningen

$$2y'' + 5y' - 3y = 0.$$

Bestem et andengradspolynomium, som er løsning til differentialligningen

$$2y'' + 5y' - 3y = -3x^2 + 4x + 14.$$

Bestem den fuldstændige løsning til den sidste differentialligning.

Opgave 3.43. Find den løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x,$$

hvis graf går gennem punktet $(0, 1)$.

Opgave 3.44. Løs differentialligningen

$$y' + \frac{2x}{x^2 + 1} y = x + 2.$$

Opgave 3.45. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x(y - 1).$$

Bestem derefter den løsning, hvis graf indeholder punktet $P(1, 2e)$.

Opgave 3.46. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = xy^2.$$

Bestem den løsning f , der opfylder $f(0) = 1$. Angiv definitionsområdet for f . Bestem den løsning g , der opfylder $g(0) = -1$. Angiv definitionsområdet for g .

Opgave 3.47. En funktion f af to variable x og y er givet ved

$$f(x, y) = 3xy^2 + x^3y - 3x^2 + 2y$$

Bestem $\partial f / \partial x$ og $\partial f / \partial y$.

Opgave 3.48. En funktion f af to variable x og y er givet ved

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 8y.$$

Bestem $\partial f / \partial x$ og $\partial f / \partial y$. Bestem de stationære punkter for f .

Opgave 3.49. Find de partielle afledede af følgende funktioner

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{\sin y} + \frac{k}{\cos y},$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

Opgave 3.50. Bestem

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda x} \cos(\omega t - t_0)) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x \sin(\omega t)).$$

Opgave 3.52. Find de stationære punkter for funktionen

$$f(x, y) = 2xy - x^4 - y^2; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Opgave 3.53. Find de partielle afledede af følgende funktioner

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4, \\ f(x, y) &= x \sin y, \quad f(x, y) = x^2 e^{xy} \\ f(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f(x, y, z) = e^{xyz}. \end{aligned}$$

Opgave 3.54. Bestem de partielle afledede af følgende funktioner

$$f(x, y, z) = x^2 e^y \ln z, \quad f(r, s, t) = (1 - r^2 - s^2 - t^2) e^{-rst}.$$

.

Opgave 3.55. Differentialligningen $y' = ay + b$ har vi tidligere løst ved separation af de variable (ID side 75–76). Den kan imidlertid også betragtes som en lineær førsteordensligning. Løs ligningen ved hjælp den formel, der er udviklet hertil.

Opgave 3.56. Bestem den fuldstændige løsning til enhver af ligningerne:

$$y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y'' - 6y' + 9y = 0, \quad 4y'' - 16y' + 25y = 0.$$