Lineære vektorafbildninger, oversigt.

Definition:

En afbildning $f: V \mapsto V$ er **lineær**, hvis

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) $f(t\vec{u}) = t \cdot f(\vec{u})$

De to betingelser kan slås sammen til

$$f(s\vec{u}+t\vec{v}) = s \cdot f(\vec{u}) + t \cdot f(\vec{v}) .$$

Dette kan udtrykkes ved at sige, at **en lineær afbildning bevarer linearkombinationer.**

Det gælder for enhver lineær afbildning, at nulvektoren afbildes i nulvektoren, og at modsat vektor afbildes i modsat vektor, dvs.

$$f(\vec{0}) = \vec{0} \text{ og } f(-\vec{v}) = -f(\vec{v}) .$$

Sætning:

En lineær afbildning er fuldstændig bestemt ved sine værdier på en basis.

Lineære afbildningers matrixfremstilling

Når en matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ har koordinaterne til billedet af første basisvektor ($f(\vec{i})$) stående i matricens første søjle og koordinaterne til billedet af anden basisvektor ($f(\vec{j})$) stående i matricens anden søjle, kan afbildningen beskrives ved:

$$f(\vec{v}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{v} \quad \text{eller} \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vi definerer **determinanten for afbildningen f** ved

$$\det(f) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Der gælder:

f er bijektiv $\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$

eller med andre ord:

f har en invers afbildning f^{-1} $\Leftrightarrow$ $\det(f) \neq 0$

Desuden har vi:

$|\det(f)|$ = arealforholdet for afbildningen f.

Sammensætning af lineære afbildninger. Matrixmultiplikation.

Når $f: V \mapsto V$ og $g: V \mapsto V$ kan vi sammensætte fx

$$(f \circ g)(\vec{v}) = f(g(\vec{v})).$$

Hvis $f(\vec{v}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{v}$ og $g(\vec{v}) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\vec{v}$ er matrixfremstillinger for f og g vil

$$(f \circ g)(\vec{v}) = \underline{\underline{\mathbf{AB}}}\vec{v}$$

være matrixfremstillingen for den sammensatte afbildning f∘g. Afbildningssammensætning svarer altså til matrixmultiplikation.

Bemærk: Matrixmultiplikation (og sammensætning af afbildninger) er **ikke** kommutativ:

$$\underline{\underline{\mathbf{AB}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{BA}}}$$

Derimod gælder den associative lov for matrixmultiplikation:

$$(\underline{\underline{\mathbf{AB}}})\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\mathbf{BC}}})$$

Invers (omvendt) afbildning. Invers matrix.

Når matricen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ hører til afbildningen f, vil den inverse matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ høre til den inverse afbildning f^{-1}. Matricen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ bestemmes ved:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Man kan altså for 2×2-matricer finde den inverse matrix efter følgende algoritme:

> Byt om på tallene i hoveddiagonalen, skift fortegn på de to sidste tal, og divider med determinanten.

Addition af lineære afbildninger. Matrixaddition.

At definere addition af lineære afbildninger ved addition af billedvektorerne leder til en definition af matrixaddition som "pladsvis" addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Addition af matricer "opfører sig" i alt væsentligt som addition af tal, dvs.

Matrixaddition er kommutativ: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Matrixaddition er associativ: $(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}) + \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} + (\underline{\underline{\mathbf{B}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}})$.

Der findes et neutralelement, nulmatricen $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$.

Enhver matrix har en modsat matrix: $-\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, dvs. en matrix, som opfylder: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} + (-\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$.