

Ugeseddel 6.

I uge 41 (11/10–13/10): Jeg fortalte lidt om om sfærisk geometri (faktisk beviste jeg den sfæriske cosinusrelation [VR, side 156], men det hører ikke med til pensum). Og jeg gennemgik SNG1–2, dvs paragrafferne 1 og 2 i „Supplerende noter, geometri“, fra kompendiet. Test-dig-selv: Repetitionsopgaver fra [VR]: 33, 34, 38, 42, 44, 45.

Nøgleord: afbildning (af planen ind i planen), parallelforskydning med forskydningsvektor $\vec{v}$, multiplikation med faktor k omkring et omkring et punkt Q , ret affinitet med akse ℓ og forvandlingstal k (også kaldet *multiplikation omkring ℓ med faktor k*).

Kommentar. En *vektoraftbildning* T „knytter“ til hver vektor $\vec{x}$ en ny vektor $\vec{x}' = T(\vec{x})$. Med symboler skrives det sådan: $\vec{x} \mapsto \vec{x}'$ eller $\vec{x} \mapsto T(\vec{x})$; hvis $\mathcal{V}$ er mængden af vektorer skriver man $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Hvordan „tilknytningen“ foregår er underordnet. Man kan tænke sig en sort boks, der indeholder en maskine (en PC, en lommeregner, en troldmand, en mønt der slår plat og krone, en formel, osv). Boksen kan modtage input og levere output: når man lægger en vektor $\vec{x}$ i input-skuffen, kommer der en vektor $\vec{x}'$ til syne i output-skuffen; det er den vektor, der „knyttes“ til $\vec{x}$, og den kaldes *billedet* eller *værdien*. Eksempel: *parallelforskydning* med en given *forskydningsvektor* $\vec{v}$ er afbildningen $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}$.

Tilsvarende kan man betragte *punktafbildninger*: input er et punkt i planen, output er et punkt i planen. Hvis Π er mængden af punkter, bruges skrivemåden $F: \Pi \rightarrow \Pi$ for en punktafbildning F . Eksempler er beskrevet i SNG2.

Afbildninger af mere generelle typer spiller en helt afgørende rolle i (anvendelser af) matematik. Funktioner betragtet i gymnasiet er afbildninger $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; her er input et reelt tal t , og output er funktionsværdien $f(t)$. Vigtige funktioner tillader ikke et vilkårligt reelt tal som input; de er typisk kun definerede for reelle tal t i et interval I , dvs for t som opfylder uligheder $a \leq t \leq b$; det angives med skrivemåden $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. En vektorfunktion, som defineret i [VR, side 79], er en afbildning $\vec{r}: I \rightarrow \mathcal{V}$.

Kommentar. I [SNG2] nævnes ikke *drejning* med en fast vinkel α (målt i radianer). Det er vektoraftbildningen $D: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, der til en plan vektor $\vec{x}$ knytter vektoren $\vec{x}' = D(\vec{x})$, der fremkommer ved at dreje $\vec{x}$ vinklen α i den positive omløbsretning. Det ses let, at denne vektoraftbildning er *lineær*, dvs $D(\vec{x} + \vec{y}) = D(\vec{x}) + D(\vec{y})$ og $D(k\vec{x}) = kD(\vec{x})$. For at bestemme koordinatfremstillingen, finder vi først billederne af basisvektorerne $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$:

$$D(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad D(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix};$$

den første ligning er essentielt definitionen af $\cos \alpha$ og $\sin \alpha$, og den anden ligning følger af den første, idet $\vec{e}_2$ er tværvektoren $\vec{e}_2 = \widehat{\vec{e}_1}$. Under brug af lineariteten får vi nu fremstillingen,

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = D(\vec{x}) = D(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1D(\vec{e}_1) + x_2D(\vec{e}_2) = x_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Planer. I uge 43 (25/10–27/10) afslutter jeg gennemgangen af [SNG] fra kompendiet.

Ugens øvelser, fra SO2: 6, 9, **12**, **13**, 15; VR: 103, 111, 123, 126.

Anders Thorup