

Ugeseddel 8.

I uge 44 (1/11–3/11) repeterede jeg reglerne for differentiation, og fortsatte med integration, dvs materiale fra ID1–2.

Nøgleord: Differentialkvotient; differentiation af sum, af differens, af konstant gange funktion, af produkt, af kvotient (brøk), og af sammensat funktion; stamfunktion; integration af sum, af differens, af konstant gange funktion; partiel stamfunktionsbestemmelse (også kaldet *delt integration*). Notationerne $\int f(x)dx$, $[F(x)]_a^b$, og $\int_a^b f(x)dx$. Test-dig-selv: Repetitionsopgaver fra [ID, side 165] 1, 2, 3, 12.

Kommentar. Integration er på mange måder det „modsatte“ af differentiation, og forståelsen forudsætter en viden om differentiation. Differentialkvotienten af en funktion $y = F(x)$ kan betegnes med flere symboler:

$$y', \quad F', \quad F'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dF(x)}{dx}, \quad F(x)'.$$

Bemærk, at selve skrivemåden „ $y = F(x)$ “ implicerer, at jeg indgår en kontrakt med dig: Vi kigger sammen på en funktion, der betegnes F , vi vil ofte bruge bogstavet x til at betegne et tal, der bruges som „input“ i (indsættes i) funktionen F , og vi vil reservere y til at betegne et tal, der kommer som „output“ (funktionsværdi) ved F . Et typisk y hænger sammen med et x , det er en „funktion af x “. Når man ændrer (lidt) på x , så ændres y (lidt). Bemærk, at kontrakten indgår i nogle af betegnelserne ovenfor. Med $y = \sin x$ har vi $dy/dx = \cos x$, og det er det samme resultat, der udtrykkes ved $z = \sin t$ og $dz/dt = \cos t$.

Kontrakten er specielt nyttig ved en sammensat funktion $F(G(x))$, givet ved de to funktioner $y = F(u)$ og $u = G(x)$. Værdien $F(G(x))$ fås ved først at udregne værdien $u = G(x)$, og dernæst værdien $F(u)$. Her er $y = F(u)$ en funktion af u , og $u = G(x)$ er en funktion af x , og når $u = G(x)$ indsættes i $F(x)$ fås værdien $y = F(G(x))$. Vi taler om y som en funktion af u (det er funktionen $y = F(u)$), og om y som en funktion af x (det er funktionen $y = F(G(x))$). Reglen for differentiation af sammensat funktion er følgende:

$$F(G(x))' = F'(G(x)) G'(x) \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Den sidste version forudsætter de indgåede kontrakter. Venstresidens dy/dx fås ved at differentiere y som funktion af x . Højresidens dy/du fås ved at differentiere y som funktion af u ; i resultatet, som er en funktion af u , skal man indsætte u som funktion af x .

Det er – i praksis – nemmere end det lyder! Funktionen $y = \sin(x^2 + 1)$ er sammensat: $y = \sin u$ og $u = x^2 + 1$. Derfor er

$$dy/dx = dy/du \cdot du/dx = (\cos u)(2x) = (\cos(x^2 + 1)) \cdot 2x.$$

Tilsvarende er $y = (\sin t)^2 + 1$ sammensat af $y = x^2 + 1$ og $x = \sin t$. Derfor er

$$dy/dt = dy/dx \cdot dx/dt = 2x \cdot \cos t = 2 \sin t \cos t.$$

Planer. I uge 45 (8/11–10/11) gennemgår jeg dele af ID3, specielt fortæller jeg lidt mere om integration ved substitution, og om anvendelser af integration.

Ugens øvelser, SO2: **14**; ID: 3, 6, 7, 9, 12, 13, 17, 22.

Anders Thorup