

Ugeseddel 9.

I uge 45 (8/11–10/11) afsluttede jeg integrationsteorien med ID3.1, 3.2, 3.4, 3.5 og 3.7. Afsnit 3.6 er ikke pensum. De resterende afsnit fra ID3 vender jeg tilbage til.

Nøgleord: Integration ved substitution. Test-dig-selv: Repetitionsopgaver fra [ID, side 165ff]: 14, 15, 18, 22, 23.

Kommentar. Den *naturlige logaritme*, $\ln x$, defineres som den stamfunktion til $1/x$, som for $x = 1$ har værdien 0. Med andre ord defineres $\ln x$ ved betingelserne,

$$(\ln x)' = 1/x, \quad \ln 1 = 0. \quad \text{Ækvivalent: } \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Her er to vigtige ligninger:

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x, \quad \text{og} \quad \ln x^a = a \ln x.$$

Den første ligning indses ved at betragte ligningens to sider som funktioner af x . Differentiation mht til x giver den samme funktion (nemlig $1/x$, prøv selv!). Derfor er det nok at indse, at ligningen gælder for blot én værdi af x . Og det gør den, nemlig for $x = 1$. Den anden ligning indses tilsvarende (gør det nu!).

Med ombyttede bogstaver har den anden ligning formen $\ln a^x = x \ln a$, og ved differentiation mht til x fås: $1/a^x \cdot (a^x)' = \ln a$, altså

$$(a^x)' = (\ln a)a^x.$$

Der ikke svært at vise, at $\ln x \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$. Specielt findes der et tal e således, at $\ln e = 1$. Af ligningen ovenfor, med $a := e$, følger specielt, at $(e^x)' = e^x$. Funktionen e^x har altså sig selv som differentialkvotient.

Kommentar. Reglen om integration ved substitution kan udtrykkes ved formelen,

$$\int y du = \int y \frac{du}{dx} dx \quad (y = f(u), u = g(x)).$$

Den fortolkes sådan: På venstresiden integreres „med hensyn til u “. Det er altså underforstået, at y på venstresiden er en funktion $y = f(u)$; integralet er så en funktion af u . På højresiden forekommer du/dx , så her underforstås, at u er en funktion $u = g(x)$. Yderligere integreres på højresiden „med hensyn til x “, så det underforstås, at y på højresiden er en funktion af x , nemlig den funktion, der fås ved sammensætningen $y = f(u)$ og $u = g(x)$, altså $y = f(g(x))$. Med disse „underforståelser“ er formlens venstreside en funktion af u og dens højreside er en funktion af x ; det er en forudsætning for ligheden i formelen, at man indsætter $u = g(x)$ i funktionen på venstresiden.

I mange anvendelser er funktionen $u = g(x)$ voksende, og så kan vi omvendt udtrykke x som en funktion af u . I formelen, som den står, kan vi derfor i stedet på højresiden indsætte denne funktion $x = h(u)$, og så er formelen en lighed mellem funktioner af u .

Planer. I uge 46 (15/11–17/11) indleder jeg differentialligningerne med ID5.

Ugens øvelser fra ID (ikke repetitionsopgaver): 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 37, 38, 49.

Anders Thorup