

Ugeseddel 10.

I uge 46 (15/11–17/11) indledte jeg differentialligningerne med ID5.1, 5.2, og dele af vækstmodellerne i 5.3. Desuden omtalte jeg kædelinien og det bærende kabel [ID, p. 136–138] og fortalte lidt om fiskerimodeller [ID, p. 160–161] (bare rolig, det hører ikke med til pensum). BEMÆRK, at differentialligninger også introduceres i SNID1 i kompendiet.

Nøgleord: Differentialligning, af første og anden orden; linieelement; separation af variable; eksponentiel vækst og eksponentielt henfald; logistisk vækst. Test-dig-selv: Repetitionsopgaver fra [ID]: 25, 27 og 32.

Kommentar. *Kædelinien* er den meget krumme „linie“, der beskrives af en kæde ophængt i to punkter. Den er grafen for en funktion $y = f(x)$, der tilfredsstiller differentialligningen $ay'' = \sqrt{1 + (y')^2}$. (Begrundelsen for denne ligning, [ID, p.136], er faktisk indeholdt i bogens argument for den efterfølgende ligning på næste side.) Ligningen løses ved først at løse differentialligningen,

$$z' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + z^2}, \quad (1)$$

idet y så fås ved at integrere z . Separation af de variable i (1) giver ligningen,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} dz = \frac{1}{a} \int 1 dx, \quad (2)$$

Højresiden er jo nem at integrere, til $(x + k)/a$ med en konstant k , men venstresiden? Her anvendes substitutionen $z = (e^u - e^{-u})/2$. Idet vi sætter $c(u) := (e^u + e^{-u})/2$, får vi følgende to ligninger:

$$dz/du = c(u), \quad \text{og} \quad 1 + z^2 = c(u)^2;$$

den første er trivel, og den anden ses efter en lille udregning. Med denne substitution opnår vi, at

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} dz = \int \frac{c(u)}{c(u)} du = u;$$

ligningen (2) fortæller derfor, at $u = (x + k)/a$. Vi har således fået løst ligningen (2) (og dermed (1)) med hensyn til z :

$$z = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad \text{hvor } u = (x + k)/a,$$

og nu er det nemt at integrere:

$$y = a \frac{e^{(x+k)/a} + e^{-(x+k)/a}}{2} + l.$$

De to konstanter k og l forskyder kædelinien vandret og lodret.

Planer. I uge 47 (22/11–24/11) fortæller jeg mere om differentialligninger fra ID5–6, og SNID5.

Ugens øvelser SO3: 5, 6, **9**, **10**; ID: 40, 52 a), 52 b), 86, 87, 91, 93, 98, 99.

Bemærk, at øvelserne fredag den 24. november foregår i Øvelseslokale 4 i kælderen.

Anders Thorup