

Ugeseddel 11.

I uge 47 (12/11–24/11) fortsatte jeg differentiaalligningerne med ID5 (resten), ID6 (beviset for sætning 1, side 88–89 kan springes over), samt SNID5, side 5.1–5.6. Desuden omtalte jeg dele af ID3.3, om integration af visse polynomiumsbrøker. Og jeg gennemgik en række eksempler ud over pensum, bl.a. fiskeri med høst (ID, side 160ff).

Nøgleord: Lineær differentiaalligning, af første og anden orden; homogen ligning, partikulær løsning. Test-dig-selv: Repetitionsopgaver fra ID: 43, 45 og 48.

Kommentar. En planets bevægelse omkring solen beskrives ved vektoren $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$. Bevægelsen styres af *tyngdeloven*: Solen tiltrækker planeten med en kraft, hvis størrelse er en konstant gange produktet af masserne (dvs $m_P m_S$) divideret med afstandskvadratet (dvs $|\vec{r}|^2$). Størrelsen er altså $km_P m_S / |\vec{r}|^2$. Selve kraften er denne størrelse gange en enhedsvektor rettet fra planeten mod solen. Enhedsvektoren er $-\vec{r}/|\vec{r}|$, så kraften, der påvirker planeten, er

$$\frac{km_S m_P}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{km_S m_P}{|\vec{r}|^3} \vec{r}.$$

Konstanten k afhænger af de enheder der måles i; vi kan antage, at $km_S = 1$. Planeten bevæger sig, så $\vec{r}$ er en vektorfunktion, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, der afhænger af tiden t . Ifølge Newton's anden lov er kraften lig med massen gange accelerationen. Kraften ovenfor er altså lig med $m_P \vec{r}''(t)$. Forkorter vi skalaren m_P væk på begge sider, får vi differentiaalligningen for vektorfunktionen $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\vec{r}'' = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (*)$$

Tænkes valgt et koordinatsystem i rummet, indgår der tre koordinatfunktioner, x_1, x_2, x_3 , i $\vec{r}$, og differentiaalligningen (*) er et differentiaalligningssystem for de tre funktioner bestående af følgende tre ligninger, for $i = 1, 2, 3$:

$$x_i'' = -x_i / (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}.$$

Ligningerne kan faktisk løses, og man kan vise, at løsningskurverne nødvendigvis er ellipser, parabler eller hyperbler med solen som brændpunkt, og for planeterne er det ellipser. Tyngdeloven (og matematik) medfører altså, at planetbanerne er ellipser (og medfører også de to andre af Kepler's love). Historisk er det naturligvis omvendt: Newton „indså“ tyngdeloven som konsekvens af Keplers love (fundet på baggrund af Tycho Brahe's observationer).

Lad os vise, at planetbevægelser nødvendigvis foregår i en plan. Hertil bruger vi, at vektorprodukt differentieres efter reglen: $(\vec{r} \times \vec{s})' = \vec{r}' \times \vec{s} + \vec{r} \times \vec{s}'$. Anvendt på $\vec{r} \times \vec{r}'$ fås

$$(\vec{r} \times \vec{r}')' = \vec{r}' \times \vec{r}' + \vec{r} \times \vec{r}'' = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

idet differentiaalligningen (*) specielt fortæller, at $\vec{r}$ og $\vec{r}''$ er proportionale. Ligningen viser, at $\vec{r} \times \vec{r}'$ må være en konstant vektor, men så må specielt $\vec{r}$ være vinkelret på denne vektor. Med andre ord ligger $\vec{r}(t)$, for alle t , i planen vinkelret på denne konstante vektor.

Planer. I uge 48 (29/11–1/12) afslutter jeg differentiaalligningerne, med materiale hentet fra SNID5 (og ID11).

Ugens øvelser SO3: 8, 32; ID: 85, 88, 90, 101, 103, 109, 112, 113.

Anders Thorup