

Ugeseddel 12.

I uge 48 (29/11–1/12) afsluttedes differentialligningerne med materiale fra SNID5 (resten). Desuden gennemgik jeg en række anvendelser (ud over pensum) af differentialligninger.

Nøgleord: Karakterligning (eller karakteristisk ligning) for lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter. Test-dig-selv: Repetitionsopgaver fra ID: 50, 51, 54, 60 og 70.

Kommentar. Differentialligningen $y' = ky$ bestemmer *eksponentiel vækst*: Løsningerne er $y = ce^{kt}$ med en konstant c . For eksponentiel vækst er brøken y'/y altså konstant, nemlig lig med k . Denne konstant kaldes den *relative væksthastighed* (eller *-rate*) i [ID, side 72]. Den kan også kaldes den *specifikke vækstrate*.

Men hvad betyder det for eksempel, at den relative vækstrate for danskere er 0,003/år? Man kunne tro, at det betød, at tilvæksten pr år pr dansker („i gennemsnit“) er 0,003 dansker, altså at tilvæksten til 5 millioner danskere efter 1 år er på $5 \cdot 10^6 \cdot 0,003 = 15.000$. Men det betyder helt præcist, at danskere udvikler sig eksponentielt med $k = 0,003$, når tiden måles i antal år: Er der y_0 danskere til tiden $t = 0$, så er der $y_0 e^{kt}$ til tiden t . Én dansker bliver derfor efter 1 år til $e^{0,003} \approx 1,0030045$ (sådan cirka), og 5 millioner danskere bliver til $5 \cdot 10^6 \cdot e^{0,003} \approx 5.015.022$. Nettotilvæksten er altså ca. 15.022.

Et mere intuitivt mål for hurtigheden af eksponentiel vækst er måske *fordoblingstiden*. Det er den tid t , for hvilken $y_0 e^{kt}$ er blevet dobbelt så stor som y_0 , dvs for hvilken e^{kt} er lig med 2. Fordoblingstiden t_2 er altså bestemt fra den specifikke vækstrate k ved ligningen $e^{kt_2} = 2$, eller ækvivalent,

$$kt_2 = \ln 2.$$

Med $k = 0,003/\text{år}$ bliver den tilsvarende fordoblingstid $(\ln 2)/0,003 \approx 231$ år.

Negative værdier af k svarer til *eksponentielt henfald*, og en tilhørende *halveringstid*.

Kommentar. Til differentialligningen $y'' + by' + cy = 0$ (homogen, af anden orden, med konstante koefficienter b, c) hører andengradsligningen,

$$k^2 + bk + c = 0, \quad \text{med diskriminanten } D = b^2 - 4c.$$

Sammenhængen mellem de to ligninger er beskrevet SNID, side 5.7–5.9. I tilfældet $D < 0$ har differentialligningen løsningen,

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}bt} \cos \omega t + c_2 e^{-\frac{1}{2}bt} \sin \omega t, \quad \text{hvor } \omega = \frac{1}{2}\sqrt{-D}.$$

Det indses naturligtvis bare ved at prøve efter, at de to funktioner $y = e^{-\frac{1}{2}bt} \cos \omega t$ og $y = e^{-\frac{1}{2}bt} \sin \omega t$ er løsninger.

Planer. I uge 49 (6/12–8/12) indleder jeg kursets sidste emne: Funktioner af to variable, fra SNID6.

Ugens øvelser SO3: 7, 11, 27, 28, 33, 55, 56; ID: 114, 115, 120, 163, 164, 165.

Anders Thorup

Det er i skrivende stund ikke afklaret hvilken aktivitet, der vil finde sted i uge 51. Som minimum vil der i hvert fald komme en spørgetime.