Kapitel 1

Den målteoretiske problemkreds

1.1 Introduktion

Målteori (mere udførlig betegnelse er Mål- og Integralteori) er en teknisk disciplin med et stort begrebsapparat, masser af resultater og masser af $\varepsilon - \delta$- og $\varepsilon - 2^{-n}$-ræsonnementer. Derfor hadet af nogle som et nødvendigt onde. Et rent værktøj.

Grundlæggende har jeg to mål med disse noter: 1. At opfylde brugernes ønske ved at tilvejebringe det nødvendige værktøj. 2. At åbne den studerendes øjne for en indre skønhed og fascination ved målteorien, og derved vende had til kærlighed!

ad 1: Målteori bruges som teknisk referenceramme i en lang række matematiske discipliner, såsom funktionalanalyse, operationsanalyse, optimering, sandsynlighedsregning, statistik, potentialteori, m.v. Nærværende korte kursus kan opfylde de basale krav som disse emner stiller til den studerendes målteoretiske kunnen, men der vil med sikkerhed fra tid til anden dukke krav op som ikke tilfredsstilles med dette kursus. Målet er – udover at tilfredsstille basale krav – at skabe et fundament der vil gøre det let for den studerende senere at sætte sig ind i målteoretiske emner, der ligger udover det, der her behandles.

ad 2: For forfatteren – men der er andre fagopfattelser – ligger målteori ret tæt på grundlaget og indgår nærmest i symbiose med mængdeteori og generel topologi. Desuden er der forbindelser til geometri. Fremstillingen, der er valgt, søger at give et indtryk heraf. Derfor benyttes fra tid til anden mængdeteoretiske og topologiske værktøjer og betragtningsmåder, der går ud over det, jeg kan regne med at alle har tilegnet sig. Jeg håber, det lykkes for mig at finde en måde at gøre dette på, som ikke bliver for tung. En forudsætning er, at den studerende har en seriøs interesse for ren matematik.

1.2 Målteoriens udgangsproblem

Vi vil straks gøre os klart, hvorfor vi kaster os ud i et stort teknisk apparat. Det er simpelthen for at kunne løse *målteoriens udgangsproblem*: Bestem udstrækningen af en delmængde af et Euklidisk rum. Givet er $n \in \mathbb{N}$ og $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi ønsker at bestemme den n-dimensionale udstrækning af A, lad os benævne den $|A|$. Vi kan også tale om det n-dimensionale volumen af A. I $\mathbb{R}^3$ drejer det sig om det sædvanlige *volumen*, i $\mathbb{R}^2$ om *arealet* og i $\mathbb{R}$ om *længden*. Hvis A er en kasse (et akseparallelt parallelepipedum):

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

er

$$|A| = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (b_n - a_n). \tag{1.1}$$

Men også i andre tilfælde, kan vi på forhånd blive enige om værdien af $|A|$. Lad os blot nøjes med det 1-dimensionale (lineære) tilfælde: $A \subseteq \mathbb{R}$. Hvis A består af endelig mange dele, hvor hver af delene er et interval, er det klart, hvad $|A|$ må være (se Figur 1).

$A:$ $$|A| = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3)$$

Figur 1

Hvis $A = \emptyset$, må $|A| = 0$ og hvis A er en singleton: $A = \{a\}$, må $|A| = 0$ også gælde. F.eks. kan vi jo indeslutte A i små intervaller, se Figur 2, og bemærke, at $|A| \leq |[a_n, b_n]|$ for alle n og $|[a_n, b_n]| \to 0$ for $n \to \infty$.

Figur 2

Hvis A består af numerabelt mange dele: $A = \bigcup_1^\infty A_n$ med A_n'erne parvis disjunkte, og vi kender $|A_n|$ for alle n, er det naturligt at blive enige om $\sum_1^\infty |A_n|$ for værdien af $|A|$, "længden" af A. I hvert fald er det "klart" at $\sum_1^\infty |A_n| \leq |A|$ må gælde, thi for hvert n er $\bigcup_1^n A_k \subseteq A$ og $|\bigcup_1^n A_k| = \sum_1^n |A_k|$. Og det er naturligt at opfatte $\bigcup_1^n A_k$ som approksimationer til A, hvorfor almindeligt anerkendte principper fra analysen nærmest tvinger os til at sætte $|A| = \lim |\bigcup_1^n A_k| = \lim \sum_1^n |A_k| = \sum_1^\infty |A_k|$.

Vi kan nu se, at $|A| = 0$ må gælde for en vilkårlig numerabel mængde.

Øvelse 1. Gør det! (udnyt, at $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$).

F.eks. har vi så

$$|\mathbb{Q}| = 0.$$

ØVELSE 2. Udnyt principper, vi allerede har accepteret (?) til at vise, at såfremt vi for to mængder A og B har fastsat værdierne af $|A|, |B|$ og $|A \cap B|$, så må $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$ og dermed må $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ såfremt $|A \cap B| < \infty$.

Ovenfor udnyttede vi betragtninger omkring approksimation indefra til at nå til enighed om værdien af $|A|$ for en del mængder. Vi kan også udnytte et princip om approksimation udefra til at fastsætte $|A|$ for endnu en række mængder. Vi har allerede anvendt et sådant princip til at bestemme $|A|$ for en singleton. Vi ser nu på et mere kompliceret eksempel: $A = C$, Cantormængden. Husk at

A_0

A_1

A_2

A_3

A_4

$\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$

Figur 3

C er mængden af $x \in [0,1]$ der i 3-talssystemet kan fremstilles uden brug af cifferet "1" (dvs. kun "0" og "2" er nødvendige). Med A_n'erne defineret som antydet på Figur 3, vil $A_n \downarrow C$ ($A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ og $\bigcap_0^\infty A_n = C$). Så er det naturligt at fastsætte

$$|C| = \lim_{n\to\infty} |A_n| = 0 \tag{1.2}$$

ØVELSE 3. Eftervis det fornuftige i fastsættelsen $|C| = 0$, dels ved betragtningsmåden antydet ovenfor, dels ved at notere, at $[0,1] \setminus C$ er en disjunkt foreningsmængde af åbne intervaller.

Vis, at C har kontinuets mægtighed: $\operatorname{card}(\mathrm{C}) = 2^{\aleph_0}$.

Resultatet $|C| = 0$ er interessant derved, at det viser et eksempel på en overtællelig mængde med udstrækning (længde) 0.

ØVELSE 4. Advarsel: Bruges princippet om bestemmelse af udstrækning ved approksimation udefra kritikløst, fås urimelige resultater. Diskutér! (der findes "store" mængder A_n med $A_n \downarrow \emptyset$!).

Øvelse 5. En delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ kaldes en *Lebesgue nulmængde* såfremt der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes intervaller I_n; $n \geq 1$ således, at $A \subseteq \bigcup_1^\infty I_n$ (intervallerne overdækker A) og $\sum_1^\infty |I_n| < \varepsilon$.

Indse det fornuftige i at sætte $|A| = 0$ for enhver Lebesgue nulmængde.

Vis, at enhver tællelig delmængde af $\mathbb{R}$ er en Lebesgue nulmængde.

Vis, at Cantormængden er en Lebesgue nulmængde.

Vis, at en tællelig forening af Lebesgue nulmængder er en Lebesgue nulmængde.

Vis, at hvis man ændrede definitionen således, at man ovenfor krævede overdækning med endeligt mange intervaller, så ville man få et væsentligt anderledes nulmængdebegreb.

Øvelse 6. Her er (Figur 4) et eksempel i $\mathbb{R}^2$ på en mængde S, vi fornuftigvis må tilskrive udstrækningen, her "arealet", 0, altså $|S| = 0$. Figuren viser approksimationer $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$ til S og er forhåbentlig selvforklarende.

Vis, at $\mathrm{card}\,(\mathrm{S}) = 2^{\aleph_0}$ og indse det fornuftige i fastsættelsen $|S| = 0$.

Figur 4

Bemærkning 1 Cantormængden C og mængden S (S for "Sierpinski") er eksempler på mængder som man nok må tilskrive udstrækning 0, men som alligevel er så store, at de må tilskrives en vis dimension større end 0. Mængderne er *fraktaler* og vi skal i Kapitel ? bestemme deres fraktale dimensioner.

Bemærkning 2 Cantormængden C optræder som standard "byggesten" i *deskriptiv mængdelære og topologi,* en teoridannelse vi fra tid til anden skal komme ind på. C er kompakt, C er 0-dimensional (dvs. der findes en basis for topologien bestående af mængder, der både er åbne og lukkede) og C er ikke-triviel i den forstand, at C ikke indeholder isolerede punkter. Man kan vise (ikke svært, se f.eks. (Topsøe, 1978)), at disse egenskaber karakteriserer C som topologisk rum, dvs. har det topologiske rum X også disse egenskaber, er X homeomorf med C. F.eks. er $2^{\mathbb{N}}$ (med produkttopologien) homeomorf med C. Faktisk er der en naturlig homeomorfi mellem C og $2^{\mathbb{N}}$ (se Øvelse 3) og man tillader sig derfor den frihed at skrive $C = 2^{\mathbb{N}}$ og f.eks. at bruge en vending som "for Cantormængden $2^{\mathbb{N}}$ gælder $\cdots$".

1.3 Målteoriens nødvendighed

I sidste § bestemte vi $|A|$ for flere og flere delmængder af $\mathbb{R}$. Man må spørge, om man kan blive "færdige" med denne proces og "til sidst" have bestemt $|A|$ for *enhver* delmængde af $\mathbb{R}$. Svaret er NEJ ! Nedslående, men centralt for udviklingen af målteorien. Det skal understreges, at det negative svar mere præcist er "Nej, såfremt naturlige krav skal være opfyldt". De naturlige krav er følgende:

(i) $0 \leq |A| \leq \infty$ for alle $A \subseteq \mathbb{R}$,

(ii) $|[a,b]| = b - a$ for $-\infty < a < b < \infty$,

(iii) *numerabel additivitet*: Er mængderne i følgen $(A_n)_{n \geq 1}$ parvis disjunkte, er $|\bigcup_1^\infty A_n| = \sum_1^\infty |A_n|$,

(iv) *translationsinvarians*: For alle $A \subseteq \mathbb{R}$ og alle $x \in \mathbb{R}$, er $|x + A| = |A|$, hvor $x + A$ betegner mængden $\{x + a | a \in A\}$.

Sætning 1.3.1 (Målteoriens Nødvendighed) *Der findes ingen afbildning $A \curvearrowright |A|$ defineret på potensmængden $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ som opfylder kravene (i)–(iv).*

Bevis. Definer ækvivalensrelationen $\sim$ på $\mathbb{R}$ ved

$$s \sim t \Leftrightarrow s - t \in \mathbb{Q}.$$

Ækvivalensklassen indeholdende $t \in \mathbb{R}$ er mængden $t + \mathbb{Q}$ (overvej !). Enhver ækvivalensklasse er dermed *tæt* i $\mathbb{R}$ (dvs. ethvert interval $]a,b[$ med $a < b$ indeholder et punkt fra ækvivalensklassen). Vælg nu, for enhver ækvivalensklasse, et punkt fra

Figur 5

ækvivalensklassen som også tilhører $[0,1]$. Herved fås "udvalgsmængden" E. Denne mængde opfylder de to krav

$$E \subseteq [0,1],$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : (t + \mathbb{Q}) \cap E \text{ er en singleton.}$$

Bemærk, at ethvert reelt tal kan skrives på formen $r+x$ med $r \in \mathbb{Q}$ og $x \in E$ og denne fremstilling er entydig. Overvej! Derfor er $(r+E)_{r\in\mathbb{Q}}$ en klassedeling af $\mathbb{R}$ i tællelig mange klasser. Hvis nu $A \curvearrowright |A|$ opfyldte de stillede krav, ville

$$\infty = |\mathbb{R}| = |\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r+E)| = \sum_{r\in\mathbb{Q}}|r+E| = \sum_{r\in\mathbb{Q}}|E|,$$

og vi må slutte, at $|E|>0$. På den anden side kan vi udnytte, at $r+E \subseteq [0,2]$ for alle $r\in[0,1]$ til at slutte, at

$$\infty > 2 \geq |\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(r+E)| = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}|r+E| = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}|E|,$$

og heraf må vi slutte, at $|E|=0$. Modstrid! Vi konkluderer, at de stillede krav ikke kan opfyldes. $\square$

Fikst, ikke? Beviset skyldes Vitali, italiensk matematiker, der omkring århundredskiftet leverede flere vigtige bidrag til målteorien. I øvrigt kan vi som et kuriosum nævne, at splinterny forskning (V. Kanovei) har vist, at Vitali's "spøjse" ækvivalensrelation i en vis forstand er "kanonisk" idet enhver anden "spøjs" ækvivalensrelation må indeholde Vitali's som en isomorf kopi.

ØVELSE 1. Udfyld alle detaljer i ovenstående bevis! (bl.a. bør man gøre rede for, hvorfor uligheden mod slutningen af beviset gælder).

Vi kan altså konkludere, at de naturlige krav til en længdefunktion ikke kan opfyldes. Der er flere mulige reaktioner på dette chok. Vi kan:

- opgive ævred!
- kassere ZFC som grundlag for matematikken
- slække på de stillede krav.

Første mulige reaktion er tåbelig: Selvfølgelig må vi have et ordentligt længdebegreb til rådighed (i $\mathbb{R}^2$ et ordentligt arealbegreb, i $\mathbb{R}^3$ et ordentligt volumenbegreb, generelt i $\mathbb{R}^n$ et ordentligt n-dimensionalt volumen).

Anden mulige reaktion er uhyre interessant! Udgangpunktet er et nærmere studium af beviset sammenholdt med det i dag anerkendte grundlag for al matematik, Zermelo-Fraenkel's aksiomssystem med udvalgsaksiomet, ZFC (Z for Zermelo, F for Fraenkel, C for "choice", sigtende på udvalgsaksiomet). Det er ZFC der tillader os at operere "som vi plejer" med mængder, og det er ZFC der tillader os at opbygge konkrete mængder som $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ (se (Topsøe, 1998) eller mere omfattende behandlinger refereret til dér) Vitali's bevis benytter selvfølgelig en masse (jeg tror *alle*) af ZFC's aksiomer. Mest kritisk i en vis forstand er udnyttelsen af udvalgsaksiomet. Det udnyttede vi til fra hver ækvivalensklasse at udvælge et punkt. Hver gang man udnytter udvalgsaksiomet, konkluderes eksistens uden konstruktion, dvs. man slutter, at et eller andet objekt eksisterer uden at man eksplicit (algoritmisk eller konstruktivt) kan pege på objektet. Det er selvfølgelig en i princippet uønsket situation, der fremstår enten som en nem genvej eller, mere betænkeligt, som et nødvendigt onde. I Vitali's bevis står vi overfor et nødvendigt onde. Beviset kan ikke erstattes af et konstruktivt ræsonnement.

Situationen understreges af et meget spændende resultat fra 1970 af den amerikanske grundlagsforsker R. Solovay, der viser, at såfremt ZFC afsvækkes til det svagere system ZFC$^\omega$ (hvor C$^\omega$, det *tællelige udvalgsaksiom*, kun tillader udvalg fra tællelige systemer af mængder), så *kan* alle vore krav tilgodeses.

Med Solovay's resultat kunne vi foreslå at ændre grundlaget for matematikken, så ZFC$^\omega$, sammen med den nødvendige logik, bliver gjort til det fundament, al matematik skal bygge på. Det er ikke nogen tosset idé, men støder dog på vanskeligheder: Dels er det fulde udvalgsaksiom bekvemt, dels vil vi ikke kunne tilfredsstille brugerne, hvis udvalgsaksiomet forlades, og dermed ville vi ikke opfylde målsætningen for kurset (se §1). Aftagerne af målteoriens resultater forlanger altså at kunne udnytte hele ZFC.

Nu er der kun den tredje mulige reaktion tilbage: Vi må slække på de opstillede krav til et fornuftigt længdebegreb. Men hvilke? Umiddelbart virker (ii) og (iv) uomgængelige. Så er der (i) og (iii) tilbage. Lad os først se på (iii), den numerable additivitet. Vi kunne nøjes med *endelig additivitet*, dvs. et svækket krav, hvor vi kun forlanger, at det for enhver endelig familie af parvis disjunkte delmængder af $\mathbb{R}$, lad os sige $A_1, \cdots, A_n$, gælder, at $|\bigcup_1^n A_k| = \sum_1^n |A_k|$. Forskellen mellem endelig- og numerabel additivitet kan belyses ved følgende observation: numerabel additivitet (for en mængdefunktion $A \curvearrowright |A|$ af den betragtede art) er det samme som endelig additivitet og approksimation indefra (dvs. kravet $A_n \uparrow A \Rightarrow |A_n| \to |A|$).

Øvelse 2. Vis dette!

Selv om det faktisk *er* muligt at opfylde de stillede krav (i)–(iv) såfremt (iii) svækkes til et krav om endelig additivitet (vi vender måske tilbage hertil i en opgave), er heller ikke dét en farbar vej: Der ville lyde et ramaskrig fra aftagerne, hvis vi gjorde det! Sagen er den, at den numerable additivitet – eller tænk på approksimation indefra – er centrale egenskaber for anvendelser i analysen. Det er jo karakteristisk for analysen, at resultater typisk opnås ved udstrakt anvendelse af konvergens – og kontinuitetsbetragtninger. Hertil er passende approksimationsegenskaber uomgængelige. Det skal dog medgives, at for visse anvendelser (især i funktionalanalyse) er endelig additivitet for nogle mængdefunktioner naturlig – dog vil ingen finde sig i kun at have endelig additivitet til rådighed for de helt basale mængdefunktioner som netop længde- og volumenfunktioner.

Vi står nu tilbage med een eneste mulighed: Kravet (i) må svækkes! Faktisk peger vor diskussion omkring udvalgsaksiomet på, hvordan dette kan ske. Vi så jo, at den mængde E, vi arbejdede med (udvalgsmængden) var “ikke-konstruktiv”.

Hvis vi nu holder os fra sådanne mængder og kun ser på længdefunktionen for "konstruktive" mængder kan det måske lade sig gøre at få kravene til længdefunktionen opfyldt. Det er dette program, vi skal gennemføre.

Det vil altså være fornuftigt at spekulere nærmere over, hvad en "konstruktivt givet" mængde er, og så bruge dette som udgangspunkt. Dette er en spændende og farbar vej som vi imidlertid ikke skal gå. Der findes nemlig en genvej som ikke stiller så store tekniske krav. Det skal vi se på i næste kapitel – men vi skal nok senere komme ind på de konstruktive aspekter.

Vi har set, at vi må modificere kravet (i) ved, i stedet for at kræve, at længdefunktionen skal være defineret på hele potensmængden $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, kun at kræve, at længdefunktionen skal være defineret på en delbrolægning $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De resterende krav (ii)–(iv) skal så modificeres på naturlig måde. Vedrørende (ii) ser vi, at vi må kræve, at $\mathcal{B}$ indeholder alle intervallerne og i (iii) ses kun på følger $(A_n)_{n\geq 1}$ af mængder fra $\mathcal{B}$ og man må kræve, at $\bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{B}$. Endelig skal vi i (iv) kun se på mængder $A \in \mathcal{B}$ og om $\mathcal{B}$ må vi kræve, at alle translationerne $x + A$ også er med i $\mathcal{B}$.

Som vi skal se – men det kræver en del tekniske forberedelser – vil vort program lykkes! Men det bliver nødvendigt for os at tage hensyn til, at definitionsbrolægningerne for de mængdefunktioner, vi skal beskæftige os med – de såkaldte *mål* (længde-, areal-, volumen- og mere generelle mål) – typisk er mere specielle end potensmængderne ($\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ eller $\mathcal{P}(X)$ for mere generelle mængder X).

Målteorien er netop den matematiske disciplin, der tager hensyn til disse forhold. At det er tvingende nødvendigt at tage sådanne hensyn har vi lært gennem Sætning 1 og ovenstående diskussion.

1.4 Skitse af den målteoretiske problemkreds

Udgangspunktet er som sagt ønsket om at konstruere "konkrete" mål som længde- og volumenmål. Som vi så i sidste §, førte det til en opmærksomhed omkring de naturlige definitionsbrolægninger for sådanne mængdefunktioner. Er X en mængde – kunne være et euklidisk rum, men andre muligheder foreligger også – vil vi kalde $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ en *Borelstruktur* såfremt $\mathcal{B}$ er et naturligt definitionsområde for et mål (præcis definition følger i næste kapitel) og $(X, \mathcal{B})$ vil vi kalde et *Borelrum*. Er $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ en mængdefunktion, der opfører sig som vi forventer, hvis vi tænker på længde- eller volumenfunktioner, kaldes μ et *mål* og $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et *målrum* (præcise definitioner følger i Kapitel II).

Her er en liste over nogle områder man beskæftiger sig med i målteorien:

- Borelstrukturer
- målenes basale egenskaber
- konstruktion af længde- og volumenmål
- nye mål ud fra gamle

- integration
- mål på mængder med gruppestruktur
- mål på topologiske rum
- mål som funktionaler
- differentiation af mål
- Hausdorffmål, Hausdorff dimension, fraktaler
- forbindelse til deskriptiv mængdelære og topologi
- målteoretiske konvergensbegreber

Vi håber at komme ind på alle disse emner, selvom eksamenspensum kun vil omfatte nogle af emnerne. De for os vigtigste emner er markeret med en pil.