Kapitel 2

Målteoriens brolægninger

2.1 Borelstruktur

Definition 2.1.1 Lad X være en mængde. En *Borelstruktur* på X, også kaldet en σ-algebra på X, er en $(\complement, \cup c)$-lukket brolægning på X. Er $\mathcal{B}$ en Borelstruktur på X kaldes $(X, \mathcal{B})$ et *Borelrum* eller et *målbart rum*. Mængderne i $\mathcal{B}$ kaldes de *målelige mængder.*

Her følger en nærmere forklaring af, hvad det vil sige, at $(X, \mathcal{B})$ er et Borelrum. Først forlanges, at $\mathcal{B}$ er en brolægning på X, dvs. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ og $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Elementerne i $\mathcal{B}$ er altså delmængder af X. Da $\mathcal{B} \neq \emptyset$ findes mindst én mængde $A \subseteq X$ så $A \in \mathcal{B}$. Der er altså mindst én målelig mængde. Kravet om at $\mathcal{B}$ skal være $(\complement, \cup c)$-lukket betyder, at $\mathcal{B}$ er lukket over for komplementærmængdedannelse og tællelig foreningsmængdedannelse. Om $\mathcal{B}$ forlanges altså, at komplementet til en målelig mængde er målelig og at foreningsmængden af tællelig mange målelige mængder er målelig. Vedrørende brolægninger henvises iøvrigt til Appendix §1.5.

Hensigten med definitionen fremgår af diskussionen i Kapitel I: En Borelstruktur skal tjene som definitionsområde for de mængdefunktioner, mål, vi ønsker at studere.

Definition 2.1.2 Lad $(X, \mathcal{B})$ være en Borelstruktur. Et *mål* på $(X, \mathcal{B})$ er en mængdefunktion μ defineret på $\mathcal{B}$ som opfylder følgende krav:
(i) $\forall A \in \mathcal{B}: \quad 0 \leq \mu(A) \leq \infty$
(ii) $\mu(\emptyset) = 0$
(iii) μ er numerabelt additiv

Er μ et mål på $(X, \mathcal{B})$, kaldes $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et *målrum*. For $A \in \mathcal{B}$ kaldes $\mu(A)$ *målet* af A. Er $\mu(X) = 1$, er μ et *sandsynlighedsmål*; så kaldes $\mu(A)$ for *sandsynligheden* af A og mængderne i $\mathcal{B}$ kaldes *hændelser.*

Til klargøring: Kravet (i) kan også udtrykkes ved at sige, at μ skal være en mængdefunktion af typen $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$. Vedrørende (ii), burde vi måske først have bevist, at den tomme mængde er målelig for enhver Borelstruktur. Denne lille sag skal vi hurtigt klare nedenfor. Det centrale krav (iii) om numerabel additivitet betyder følgende: For enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af parvis disjunkte målelige mængder skal

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{2.1}$$

gælde.

Et hovedmål i kurset er at studere mål som fastlagt i Definition 2. Som det er fremgået af diskussionen i Kapitel I, er der imidlertid nogle problemer omkring definitionsmængderne for målene, altså Borelstrukturerne. Vi har valgt en systematisk behandling, hvor vi i dette kapitel ser nøjere på Borelstrukturerne (og visse andre vigtige brolægninger) og så lægger Definition 2 lidt til side indtil næste kapitel. Men det er rart at have set den præcise definition på mål, så vi ved, hvad det hele går ud på!

Eksempel 1. Lad X være en vilkårlig mængde. Så er $\mathcal{P}(X)$ en Borelstruktur, den *diskrete Borelstruktur* på X, og $(X, \mathcal{P}(X))$ er dermed et Borelrum. For den diskrete Borelstruktur er enhver delmængde af X målelig. Normalt er den diskrete Borelstruktur for fin, dvs. indeholder for mange målelige mængder, til målteoretiske formål, jvf. diskussionen i Kapitel I. $\square$

Eksempel 2. Lad X være en vilkårlig mængde. Lad $\mathcal{B}$ være brolægningen på X, der består af alle mængder A, så enten A eller komplementet $\complement A$ er tællelig, altså:

$$\mathcal{B} = \left\{A \subseteq X \mid \mathrm{card}\,(\mathrm{A}) \leq \aleph_0 \vee \mathrm{card}\,(\complement \mathrm{A}) \leq \aleph_0\right\}.$$

Så er $\mathcal{B}$ en Borelstruktur. Lad os vise det. Det er klart, at $\mathcal{B} \neq \emptyset$, thi $\emptyset \in \mathcal{B}$. Det er også klart, at $\mathcal{B}$ er $(\complement)$-lukket (altså at $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{B}$). For at vise, at $\mathcal{B}$ er $(\cup c)$-lukket, antager vi, at $A_n \in \mathcal{B}$ for $n \geq 1$. Sæt $A = \bigcup_1^\infty A_n$. Hvis alle mængderne A_n er tællelige, så er også A tællelig og dermed med i $\mathcal{B}$. Hvis det blot for ét $n_0 \geq 1$ gælder, at A_{n_0} ikke er tællelig, må $\complement A_{n_0}$ være tællelig og da

$$\complement A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \complement A_n \subseteq \complement A_{n_0},$$

må $\complement A$ derfor også være tællelig og dermed vil $A \in \mathcal{B}$. Vi har hermed eftervist, at $\mathcal{B}$ er en Borelstruktur.

Vi refererer til $\mathcal{B}$ som den *tællelige/co-tællelige Borelstruktur* på X. Normalt er denne Borelstruktur for grov, dvs. den indeholder for få målelige mængder, til at være målteoretisk interessant. $\square$

Eksempel 3. Lad igen X være en vilkårlig mængde. Så er $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$ åbenbart en Borelstruktur på X, den *diffuse Borelstruktur*. Den er alt, alt for grov til at kunne bruges til noget interessant i målteorien. $\square$

Øvelse 1. Lad X og Y være mængder. Definér brolægningen $\mathcal{B}$ på produktmængden $X \times Y$ som brolægningen af alle mængder $A \subseteq X \times Y$, der kun afhænger af første-koordinaten. Præcisér, hvad der menes hermed og vis, at $\mathcal{B}$ er en Borelstruktur på $X \times Y$.

Vi har valgt en definition, der stiller meget få krav til en Borelstruktur. I virkeligheden kommer de tilsyneladende enkle krav ud på at kræve om en Borelstruktur, at den skal være lukket under alle sædvanlige tællelige mængdeteoretiske operationer. Lad os vise det.

Sætning 2.1.1 *Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum. Så gælder følgende:*
(i) $\emptyset \in \mathcal{B} \wedge X \in \mathcal{B}$
(ii) $A \in \mathcal{B} \wedge B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B} \wedge A \triangle B \in \mathcal{B}$
(iii) $A_k \in \mathcal{B}$ *for* $1 \le k \le n \Rightarrow \bigcup_1^n A_k \in \mathcal{B} \wedge \bigcap_1^n A_k \in \mathcal{B}$
(iv) $A_k \in \mathcal{B}$ *for* $1 \le k < \infty \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_k \in \mathcal{B} \wedge \bigcap_1^\infty A_k \in \mathcal{B}$

Bevis. (i) Da $\mathcal{B} \neq \emptyset$ findes $A \in \mathcal{B}$. Så vil også $\complement A \in \mathcal{B}$ og af $X = \complement A \cup A \cup A \cup \cdots$ sluttes, at $X \in \mathcal{B}$. Så må også $\emptyset = \complement X \in \mathcal{B}$.

(iii): Antag, at $A_1, A_2, \cdots, A_n$ er målelige. Så er $\bigcup_1^n A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ også målelig. Også $\bigcap_1^n A_k$ må være målelig, thi $\complement A_1, \cdots, \complement A_n$ er målelige og

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \complement \left(\bigcup_{k=1}^{n} \complement A_k \right).$$

(ii): Da $A \setminus B = A \cap \complement B$ og $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ følger dette nu let af (iii).

(iv): Egenskaben vedrørende $\bigcup_1^\infty A_k$ er en gentagelse af (en del af) definitionen og egenskaben vedrørende $\bigcap_1^\infty A_k$ bevises på lignende måde som det tilsvarende resultat under (iii). $\square$

Vi kan kort udtrykke alle egenskaberne i Definition 1 og i Sætning 2.1.1 ved at sige, at en Borelstruktur på X er $(\emptyset, X, \complement, \setminus, \triangle, \cup f, \cap f, \cup c, \cap c)$-lukket. Her står "f" for "finite", endelig. At en brolægning er $(\cup f)$-lukket betyder såldedes, at den er lukket under endelig foreningsmængdedannelse.

Øvelse 2. Lad $\mathcal{B}$ være en Borelstruktur og lad $(A_n)_{n \ge 1}$ være en følge af målelige mængder. Bevis, at så vil også $\liminf A_n$, *mængdeteoretisk limes inferior* af (A_n), og $\limsup A_n$, *mængdeteoretisk limes superior* af (A_n), være målelige. Husk, at $\liminf(A_n)$ er mængden af $x \in X$ så $x \in A_n$ f.v.t. altså $x \in A_n$ fra et vist trin, og $\limsup(A_n)$ er mængden af $x \in X$ så $x \in A_n$ u.o., altså $x \in A_n$ uendelig ofte:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} A_n &= \{x \mid \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \ge n_0 : x \in A_n\}, \\ \limsup_{n\to\infty} A_n &= \{x \mid \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\, \exists\, n \ge n_0 : x \in A_n\}. \end{aligned}$$

ØVELSE 3. Lad igen $(A_n)_{n\geq 1}$ være en følge af målelige mængder i en Borel struktur. For ethvert $k \in \mathbb{N}_0$ betegner vi med T_k mængden af de x som tilhører præcis k af A_n'erne, altså:

$$T_k = \{x \mid \mathrm{card}\,(\{\mathrm{n} \geq 1 \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A_n}\}) = \mathrm{k}\}; \quad \mathrm{k} \geq 0.$$

Bevis, at alle mængderne T_k; $k \geq 0$ er målelige.

Undersøg, om vi kan slutte at også mængden T_∞ er målelig, hvor T_∞ består af de elementer, der ligger i uendelig mange af A_n'erne.

$*$ **Bemærkning** Vi fremhævede, at en Borelstruktur er lukket under alle sædvanlige tællelige mængdeoperationer. Findes "usædvanlige" operationer som Borelstrukturer ikke nødvendigvis er lukkede under? Ja, det gør der! Her tænker vi på den såkaldte *Souslinoperation*, som dog ikke er en "ren" tællelig operation. Lad os kort indføre denne uhyre interessante operation og så i øvrigt henvise den interesserede til (Hoffmann-Jørgensen, 1970) eller til (Topsøe, 1982).

Vi sætter $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_0^\infty \mathbb{N}^k$ (med $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$). Er $\mathcal{E}$ en brolægning, kan man spørge, om $\mathcal{E}$ er lukket under *Souslinoperationen* ((S)-lukket), dvs. om det for en vilkårlig afbildning $n_1 \cdots n_k \curvearrowright A(n_1 \cdots n_k)$ af $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ ind i $\mathcal{E}$ (et såkaldt *$\mathcal{E}$-Souslin skema*) gælder, at den tilhørende *Souslinmængde*

$$S(A) = \bigcup_{n_1 n_2 \cdots \in \mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A(n_1 \cdots n_k)$$

igen ligger i $\mathcal{E}$. Nogle af målteoriens vigtige Borelstrukturer er (S)-lukkede, andre er ikke.

Som vi har været inde på i eksemplerne 1–3, er der en naturlig ordning på mængden af Borelstrukturer på en fast mængde X. Er $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ to sådanne Borelstrukturer, siger vi, at $\mathcal{B}_1$ er *finere* end $\mathcal{B}_2$ eller, at $\mathcal{B}_2$ er *grovere* end $\mathcal{B}_1$, såfremt $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2$. Der er altså flere målelige mængder i en fin Borelstruktur end i en grov.

ØVELSE 4. For enhver mængde X findes såvel en fineste som en groveste Borelstruktur på X, nemlig hvilke?

En måde at indføre fornuftige Borelstrukturer på er at tage udgangspunkt i en konkret brolægning $\mathcal{E}$ – der typisk *ikke* er en Borelstruktur – og så opsøge Borelstrukturer der opfylder kravet, at enhver mængde i $\mathcal{E}$ er målelig, dvs. vi søger brolægninger, der opfylder kravet $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$. Sådanne Borelstrukturer findes altid, idet den diskrete Borelstruktur jo kan bruges. Lad os forestille os, at $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ netop er samtlige Borelstrukturer, der opfylder kravet. Vi kan så se på brolægningen

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \mid \forall\, i \in I : B \in \mathcal{B}_i\}.$$

Det er klart, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$. Et øjebliks overvejelse viser, at $\mathcal{B}$ er en Borelstruktur. Se selv efter! Åbenbart er $\mathcal{B}$ den groveste Borelstruktur, der indeholder $\mathcal{E}$, idet jo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_i$ for alle $i \in I$. Vi har hermed bevist følgende

Sætning 2.1.2 *For enhver mængde X og enhver brolægning $\mathcal{E}$ på X findes en groveste Borelstruktur, så enhver mængde i $\mathcal{E}$ bliver målelig.*

Definition 2.1.3 Den groveste Borelstruktur, der indeholder en given brolægning $\mathcal{E}$, hedder *Borelstrukturen,* eller *σ-algebraen frembragt af $\mathcal{E}$*, og betegnes $\sigma(\mathcal{E})$. Er $\mathcal{B}$ en Borelstruktur og $\mathcal{B}_0$ en delbrolægning af $\mathcal{B}$ så $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_0)$, siges $\mathcal{B}_0$ at være et *frembringersystem* for $\mathcal{B}$.

Bemærkning Når der nu til en given brolægning $\mathcal{E}$ svarer en entydigt bestemt og meget naturlig Borelstruktur, nemlig $\sigma(\mathcal{E})$, vil det være nærliggende at forvente, at man eksplicit kan karakterisere mængderne i $\sigma(\mathcal{E})$ ud fra mængderne i $\mathcal{E}$. Dette er imidlertid ikke tilfældet. Beviset for Sætning 2 var meget lidt konstruktivt og er ingen hjælp i denne sammenhæng. Problemet kan belyses ud fra vore bestræbelser i Kapitel I, hvor vi fandt flere og flere mængder som vi kunne give en “længde” uden at vi dog blev færdige med denne proces. I næste § skal vi, med et vist forbehold, vise, at man kan konstruere sig frem til $\sigma(\mathcal{E})$. Men let er det ikke. Forholdet står i kontrast til den tilsvarende problemstilling i den generelle topologi, hvor det er let at beskrive topologien frembragt af en given brolægning.

Eksempel 4. Langt den vigtigste Borelstruktur i hele målteorien er den *naturlige Borelstruktur* på $\mathbb{R}$. Den kan defineres på flere måder. Her vælger vi at hæfte os ved kravet, at ethvert lukket interval $[a,b]$ skal være måleligt. Betegner vi med $\mathcal{J}$ brolægningen af samtlige lukkede intervaller på $\mathbb{R}$, kan vi nu definere den *naturlige Borelstruktur* på $\mathbb{R}$ som Borelstrukturen $\sigma(\mathcal{J})$. Vi skal senere (§??) give en ækvivalent, men formelt set lidt ændret definition, som vil dække langt mere generelle rum end $\mathbb{R}$. Den naturlige Borelstruktur på $\mathbb{R}$ betegnes $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Vi indfører også den naturlige Borelstruktur for de udvidede reelle tal; det er Borelstrukturen $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ af $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ med $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Den naturlige Borelstruktur på $\bar{\mathbb{R}}$ er “stort set” den samme som den på $\mathbb{R}$. Ofte vil man formulere og bevise resultater for én af Borelstrukturerne $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ og $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, men frit udnytte resultaterne for begge. Er der vanskeligheder hermed, bør man gøre opmærksom herpå.

Når vi taler om målelige mængder i $\mathbb{R}$ eller i $\bar{\mathbb{R}}$, har vi altid de naturlige Borelstrukturer i tankerne med mindre andet påpeges. □

Øvelse 5. Bevis, at alle mængder, der optrådte i Kapitel I, specielt Cantormængden, er målelige m.h.t. den naturlige Borelstruktur på $\mathbb{R}$.

Øvelse 6. Vis, at

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \{A \cup \Delta \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \Delta \subseteq \{-\infty, \infty\}\}.$$

Vis, at

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

og undersøg, om denne egenskab gælder for andre Borelstrukturer på $\bar{\mathbb{R}}$.

Undertiden er det bekvemt – typisk som en slags "mellemstation" – at se på en svækkelse af begrebet "en σ-algebra", hvor vi kun ser på endelige mængdeoperationer.

Definition 2.1.4 *Lad X være en mængde. En brolægning $\mathcal{A}$ på X kaldes en algebra, såfremt $\mathcal{A}$ er* $(\complement, \cup f)$*-lukket.*

Om en algebra forlanges altså, at den er lukket over for komplementærmængdedannelse og endelig foreningsmængdedannelse. Vi forlanger altså, at de to implikationer: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \complement A \in \mathcal{A}$ og $A_1 \in \mathcal{A} \wedge A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ gælder.

Helt i analogi med Sætning 2.1.1 gælder følgende

Sætning 2.1.3 *En algebra $\mathcal{A}$ på en mængde X er lukket under alle sædvanlige endelige mængdeoperationer, d.v.s. egenskaberne* (i), (ii) *og* (iii) *fra Sætning 2.1.2 gælder.*

Også Sætning 2.1.2 og Definition 2.1.3 har naturlige analoge udformninger for algebraer:

Sætning 2.1.4 *For enhver mængde X og enhver brolægning $\mathcal{E}$ på X findes en groveste algebra som indeholder $\mathcal{E}$.*

Definition 2.1.5 *Den groveste algebra, der indeholder en given brolægning $\mathcal{E}$, hedder algebraen frembragt af $\mathcal{E}$ og betegnes $\alpha(\mathcal{E})$.*

2.2 Baire-hierarkiet

Det er svært mere eksplicit at beskrive eller konstruere mængderne i $\sigma(\mathcal{E})$, hvor $\mathcal{E}$ er en vilkårlig brolægning på en abstrakt mængde X. Selv i tilfældet $X = \mathbb{R}, \mathcal{E} = \{\text{intervaller } [a,b]\}$ er det svært. Vi skal vise, at det faktisk *kan* lade sig gøre – forudsat vi "kender" ordinaltallene op til ω_1, (se Appendix, §7).

Først bemærkes, at det ikke så meget er komplementærmængdedannelsen $(\complement)$ som gitteroperationerne $(\cup c)$ og $(\cap c)$ der volder kvaler. Dette fremgår f.eks. af Opgave 6, men vil også blive noteret i sætningen nedenfor.

Indfør notation som i Opgaverne 4 og 6: $\mathrm{Bor}\,(\mathcal{E})$, *$\sigma$-gitteret* (eller den *Borelske struktur*) frembragt af $\mathcal{E}$ betegner $(\cup c, \cap c)$-lukningen af $\mathcal{E}$.

Givet brolægningen $\mathcal{E}$ på X, defineres *Baire-hierarkiet* hørende til $\mathcal{E}$ som familien $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ af brolægninger indiceret med ordinaltallene mindre end ω_1, fastlagt ved rekursion over $[0, \omega_1[$ gennem følgende krav:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}, \\
\mathcal{E}_{\gamma+n} &= (\mathcal{E}_{\gamma+n-1})_\sigma \text{ for } \gamma \text{ grænseordinaltal eller 0 og } n \text{ ulige}, \\
\mathcal{E}_{\gamma+n} &= (\mathcal{E}_{\gamma+n-1})_\delta \text{ for } \gamma \text{ grænseordinaltal eller 0 og } n \text{ lige} \geq 2, \\
\mathcal{E}_\gamma &= \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{E}_\alpha \text{ for } \gamma \text{ grænseordinaltal.}
\end{aligned}$$

Her er det underforstået, at kun γ'er med $\gamma < \omega_1$ betragtes. Ifølge rekursionsprincippet definerer ovenstående entydigt hele familien $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ af brolægninger. De første få brolægninger $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ og $\mathcal{E}_3$ er hhv. $\mathcal{E}, \mathcal{E}_\sigma, \mathcal{E}_{\sigma\delta}$ og $\mathcal{E}_{\sigma\delta\sigma}$.

Sætning 2.2.1 (i). $\operatorname{Bor}(\mathcal{E}) = \bigcup\{\mathcal{E}_\alpha | \alpha < \omega_1\}$.
(ii). *Såfremt* $\operatorname{co}(\mathcal{E}) \subseteq \operatorname{Bor}(\mathcal{E})$*, f.eks. hvis* $\operatorname{co}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}_\sigma$*, er* $\sigma(\mathcal{E}) = \operatorname{Bor}(\mathcal{E})$.

Bevis. (i): Sæt $\mathcal{E}_{\omega_1} = \bigcup\{\mathcal{E}_\alpha | \alpha < \omega_1\}$. Vi skal vise, at $\operatorname{Bor}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\omega_1}$. Det er klart, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{\omega_1}$ og ved transfinit induktion over $[0, \omega_1[$ ses, at for hvert $\alpha < \omega_1$ er $\mathcal{E}_\alpha \subseteq \operatorname{Bor}(\mathcal{E})$. Dermed er $\mathcal{E}_{\omega_1} \subseteq \operatorname{Bor}(\mathcal{E})$. Vi vil fuldføre beviset ved at vise, at $\mathcal{E}_{\omega_1}$ er et σ-gitter. Er dette vist, ses nemlig af $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{\omega_1}$, at $\operatorname{Bor}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}_{\omega_1}$. Vi nøjes med at vise, at $\mathcal{E}_{\omega_1}$ er $(\cup c)$-lukket (analogt vil man kunne vise, at $\mathcal{E}_{\omega_1}$ er $(\cap c)$-lukket).

Lad derfor $E_1, E_2, \cdots$ være mængder i $\mathcal{E}_{\omega_1}$. Bestem ordinaltal $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$, alle $< \omega_1$, så $E_n \in \mathcal{E}_{\alpha_n}$; $n \geq 1$. Da $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ er en tællelig delmængde af $[0, \omega_1[$, findes $\beta < \omega_1$ så $\alpha_n \leq \beta$ for alle $n \geq 1$. Vi kan gerne antage, at β er på formen $\beta = \gamma + n$ med γ et grænseordinaltal og n ulige. Så vil $E_n \in \mathcal{E}_\beta$ for alle $n \geq 1$ og da $\mathcal{E}_\beta$ er $(\cup c)$-lukket, vil $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{E}_\beta$. Dermed vil $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in \mathcal{E}_{\omega_1}$, hvilket skulle vises.

(ii): Antag nu, at $\operatorname{co}(\mathcal{E}) \subseteq \operatorname{Bor}(\mathcal{E})$. Sæt $\mathcal{S} = \operatorname{Bor}(\mathcal{E}) \cap \operatorname{co}(\operatorname{Bor}\mathcal{E})$. Det ses let, at $\mathcal{S}$ er en σ-algebra. Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$, vil $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. Af $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{Bor}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ses så, at $\sigma(\mathcal{E}) = \operatorname{Bor}(\mathcal{E})$. $\square$

ØVELSE 1. I beviset for (i) benyttede vi, at brolægningerne $\mathcal{E}_\alpha$ bliver finere og finere, når α vokser. Hvor benyttede vi det? Hvordan kan man bevise denne monotoniegenskab?

Korollar 2.2.1 *Ser vi i* $X = \mathbb{R}$ *på Baire-hierarkiet* $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ *hørende til brolægningen af lukkede intervaller, er* $\bigcup\{\mathcal{E}_\alpha | \alpha < \omega_1\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, den naturlige Borelstruktur på* $\mathbb{R}$.

Korollar 2.2.2 *Er* $\mathcal{E}$ *tællelig, er* $\operatorname{card}(\sigma(\mathcal{E})) \leq 2^{\aleph_0}$.

Bevis. Vi kan antage, at $\mathcal{E} = \operatorname{co}\mathcal{E}$ (udnyt (ii) i sætningen eller se evt. Opgave 6). Så er, med notation som i beviset for Sætning 1, $\mathcal{E}_{\omega_1} = \sigma(\mathcal{E})$. Ved transfinit induktion ses, at $\operatorname{card}(\mathcal{E}_\alpha) \leq 2^{\aleph_0}$ for alle $\alpha < \omega_1$ (ikke helt trivielt! Prøv selv at vise det!). Så må

$$\operatorname{card}\sigma(\mathcal{E}) = \operatorname{card}(\mathcal{E}_{\omega_1}) \leq 2^{\aleph_0} \cdot \operatorname{card}([0, \omega_1[) \leq 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}. \qquad \square$$

Korollar 2.2.3 *For den naturlige Borelstruktur på* $\mathbb{R}$ *gælder, at* $\operatorname{card}\mathcal{B}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$.

Da $\operatorname{card}\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$ er der flere delmængder af $\mathbb{R}$ end der er Borelmængder. Der findes altså delmængder af $\mathbb{R}$, der ikke er Borelmængder. Det vrimler endda med dem i en vis forstand. Der er nemlig $2^{2^{\aleph_0}}$-mange ikke-Borelmængder, men kun $2^{\aleph_0}$-mange Borelmængder.

Der er noget paradoksalt ved dette forhold, idet det er uhyre vanskeligt eksplicit at pege på én eneste ikke-Borel delmængde af $\mathbb{R}$ (men det *kan* dog lade sig gøre, se f.eks. (Hoffmann-Jørgensen, 1970)).

Vores bevis for eksistensen af ikke-Borel mængder i $\mathbb{R}$ var forholdsvis let (og smart!), men lider af en mangel: Det er ikke konstruktivt. Vi byggede på princippet $X \subseteq Y \wedge \mathrm{card}\,(\mathrm{X}) < \mathrm{card}\,(\mathrm{Y}) \Rightarrow \mathrm{Y} \setminus \mathrm{X} \neq \emptyset$ til at indse det ønskede. Så derfor er der ikke noget egentligt paradoks i at det er så svært at fremvise en konkret ikke-Borel mængde.

2.3 En sætning af Sierpinski

I generel målteori optræder et sandt virvar af forskellige brolægninger, der mildest talt kan virke forvirrende. Vi skal prøve at klare os med ganske få begreber og i høj grad delegere begreber og egenskaber til opgaverne. For at give læseren mulighed for let at finde alle begreber, har vi samlet dem i Appendix 2.

I denne § skal vi udelukkende se på vigtige brolægninger, der kan optræde ved studiet af et ganske bestemt problem: Hvilke generelle værktøjer har vi til i en bestemt sammenhæng at vise, at alle målelige mængder har en eller anden ønskværdig egenskab?

Tanken er følgende: Borelstrukturer, σ-algebraer, er den altafgørende type af brolægninger for os. Er $X = (X, \mathcal{B})$ en Borelstruktur må vi derfor forvente, at vi ofte kan komme ud for at skulle vise det ene eller det andet om mængderne i $\mathcal{B}$, om de målelige mængder.

Én måde at angribe problemet på er følgende: Typisk er en Borelstruktur givet ved et frembringersystem: $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ og ved at holde styr på, hvordan $\mathcal{B}$ opbygges ud fra $\mathcal{E}$ kan vi "holde øje" med den eller de egenskaber, vi vil se på. Dette er et godt program. Det fører direkte til opbygningen af $\mathcal{B}$ via Baire-hierarkiet, som vi så på i sidste §. En lidt kedelig ting ved dette program er, at mange har et usundt forhold til ordinaltallene og føler sig utrygge ved transfinit induktion og rekursion. Og disse ingredienser indgår i Baire-hierarkiet.

Heldigvis findes en alternativ angrebsvinkel, der er mere elementær. Den vil vi nu se på. Idéen skyldes Sierpinski. Lad os tænke os, at vi studerer en attråværdig egenskab $*$, som en mængde enten kan have eller ikke have. Lad $\mathcal{S}$ være brolægningen af alle mængder, der har $*$-egenskaben. Og lad os tænke os, at vi allerede har noteret os, at alle mængderne i en vis – grovere – brolægning $\mathcal{E}$ faktisk *har* egenskaben $*$. Hvis nu såvel $\mathcal{E}$ som $\mathcal{S}$ har "passende" struktur, kan man håbe på at det "automatisk" følger, at $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$, altså at også alle mængderne i σ-algebraen frembragt af $\mathcal{E}$ har egenskaben $*$.

Som første resultat – der dog ikke kræver Sierpinski's geni – peger vi på det helt banale resultat, at såfremt $\mathcal{S}$ er en σ-algebra, må $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$ naturligvis gælde. Grunden til at vi fremdrager denne banalitet i en sætning er den, at det er langt den hyppigst anvendte metode til at bevise resultater af den ønskede art. Det vil vi se flere eksempler på i det følgende.

Altså:

Sætning 2.3.1 *Lad $\mathcal{E}$ og $\mathcal{S}$ være brolægninger på X og antag, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Hvis $\mathcal{S}$ er en σ-algebra, vil $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$.*

Fra tid til anden kan man ikke klare sig med denne banalitet. Der er så flere muligheder for mere raffinerede resultater. Vi kan dog klare os med ét resultat og henviser til opgaverne for andre varianter.

Sætning 2.3.2 *Lad $\mathcal{E}$ og $\mathcal{S}$ være brolægninger på X og antag, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Hvis vi om $\mathcal{E}$ yderligere antager, at $\mathcal{E}$ er $(\cap f)$-lukket og om $\mathcal{S}$ yderligere antager, at $\mathcal{S}$ er $(\complement, \Sigma c)$-lukket og indeholder $\emptyset$, så kan vi slutte, at $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$.*

Bemærkning Om $\mathcal{E}$ antages altså, at $\mathcal{E}$ er lukket under endelig fællesmængdedannelse. D.v.s., vi antager, at såfremt E_1 og E_2 er to mængder i $\mathcal{E}$, så vil også $E_1 \cap E_2$ tilhøre $\mathcal{E}$. Betingelsen, der kræves om $\mathcal{S}$, udover det banale krav $\emptyset \in \mathcal{S}$, kommer ud på følgende to krav: Dels, at man af $S \in \mathcal{S}$ kan slutte, at også $\complement S \in \mathcal{S}$, dels at man af $S_1 \in \mathcal{S}$, $S_2 \in \mathcal{S}$, $\cdots$ og (vigtigt!) af forudsætningen, at $S_1, S_2, \cdots$ er parvis disjunkte mængder, kan slutte, at også $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \in \mathcal{S}$.

Bemærkning Sætningen skyldes som nævnt Sierpinski, men er senere blevet genopdaget af Dynkin. I litteraturen omtales den ofte som *Dynkin's lemma*.

Bevis Lad $\mathcal{H}$, en hjælpebrolægning, betegne $(\emptyset, \complement, \Sigma c)$-afslutningen af $\mathcal{E}$, altså den mindste (groveste) brolægning, der indeholder $\mathcal{E}$ og er $(\emptyset, \complement, \Sigma c)$-afsluttet.

At $\mathcal{H}$ er veldefineret ses på samme måde som under beviset for Sætning 2.1.2 (det er let!). Af forudsætningerne følger, at

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}.$$

Kan vi blot vise, at $\mathcal{H}$ er en σ-algebra, er vi færdige, thi så kan vi slutte, at

$$\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}.$$

Vi bemærker nu, at hvis vi kan vise, at $\mathcal{H}$ er $(\cap f)$-lukket, må $\mathcal{H}$ være en σ-algebra. Grunden hertil er, at så må $\mathcal{H}$ være $(\complement, \cup f)$-lukket, altså en algebra (hvormed Sætning 2.1.3 kan anvendes) og så er det let at se, at $\mathcal{H}$ må være $(\cup c)$-lukket ved at anvende "disjunktifisering" (dvs. til $H_1, H_2, H_3, \cdots$ ses på de nye mængder $H_1, H_2 \backslash H_1, H_2 \backslash (H_1 \cup H_2), \cdots$ der er parvis disjunkte og har samme foreningsmængde som de gamle).

Kernen i beviset er nu at vise, at $\mathcal{H}$ er $(\cap f)$-lukket. Dette er faktisk let, men kræver et lille trick. For en vilkårlig mængde E sætter vi

$$\mathcal{H}_E = \{H \in \mathcal{H} \mid E \cap H \in \mathcal{H}\}. \tag{2.2}$$

Vi bemærker nu, at der gælder implikationen

$$E \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}_E(\complement, \Sigma c) - \text{lukket}. \tag{2.3}$$

Det er klart (selv uden forudsætningen $E \in \mathcal{H}$), at $\mathcal{H}_E$ er (Σc)-lukket (tegn!). Antag nu, at $E \in \mathcal{H}$ og at $H \in \mathcal{H}_E$. Så må $\complement H \in \mathcal{H}$ og af omskrivningen

$$E \cap \complement H = \complement\left((\complement E) \cup (E \cap H) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots\right)$$

følger, at også $E \cap \complement H \in \mathcal{H}$. Dermed må $\complement H \in \mathcal{H}_E$. Alt i alt ses, at (2.3) er bevist.

Hvis nu $E \in \mathcal{E}$, ses, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}_E$ og af (2.3) sluttes så, at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_E$; med andre ord, der gælder implikationen

$$E \in \mathcal{E} \wedge H \in \mathcal{H} \Rightarrow E \cap H \in \mathcal{H},$$

der også kan udtrykkes som følger

$$H \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}_H. \tag{2.4}$$

Lad nu $H \in \mathcal{H}$ være vilkårlig. Udnyt først (2.4) til at slutte $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}_H$ og dernæst (2.3) til at slutte $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_H$. Da $H \in \mathcal{H}$ var vilkårlig, viser dette, at $\mathcal{H}$ er lukket under $(\cap f)$. $\square$

Bemærkning Vi gør opmærksom på en lidt fjollet pedantisk detalje: Sådan set er kravet $\emptyset \in \mathcal{S}$ overflødigt i sætningen, forudsat vi med lukkethed overfor (Σc)-operationen mener lukkethed overfor disjunkt forening af familier, der enten er numerabelt uendelige eller endelige. I anvendelserne er der aldrig besvær med at checke, at $\emptyset \in \mathcal{S}$, så vi har medtaget kravet for en sikkerheds skyld (hvis kravet droppes og (Σc)-operationen kun sigter til numerabelt uendelige familier, er sætningen strengt taget gal – overvej!).

Ved at kopiere beviset ovenfor, men i en variant, hvor kun endelige mængdeoperationer forekommer, fås et andet nyttigt teknisk hjælperesultat:

Sætning 2.3.3 *Lad $\mathcal{E}$ og $\mathcal{S}$ være brolægninger på X og antag, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Hvis $\mathcal{E}$ er $(\cap f)$-lukket og $\mathcal{S}$ er $(\complement, \Sigma f)$-lukket, så vil $\alpha(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$.*

EKSEMPEL 1. Som en anvendelse af Sætning 2, viser vi, at i en σ-algebra frembragt af en brolægning er der i en vis forstand kun tællelig mange mængder i brolægningen, der giver anledning til hver fast mængde i σ-algebraen. Præcist:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup \{\sigma(\mathcal{E}_0) \mid \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E},\ \mathcal{E}_0 \text{ tællelig}\}. \tag{2.5}$$

For at vise det, lader vi $\mathcal{S}$ være brolægningen af $S \subseteq X$ for hvilke der findes $\mathcal{E}_0$ tællelig delbrolægning af $\mathcal{E}$ med $S \in \sigma(\mathcal{E}_0)$. Så er $\mathcal{S}$ en σ-algebra (overvej!) og $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Heraf følger (2.4). Bemærk, at (2.4) også let indses ved at se på et passende Baire hierarki.

Eksempel 2. Vi tillader os en ekskursion i den egentlige målteori for at illustrere, hvordan de mere væsentlige dele af Sætning 2 kan anvendes.

Lad $(X, \mathcal{B})$ være en Borelstruktur og antag, at μ og η begge er sandsynlighedsmål på denne Borelstruktur. Hvis nu $\mathcal{E}$ er en "passende" delbrolægning af $\mathcal{B}$ og vi ved, at $\mu = \eta$ på $\mathcal{E}$ (dvs. $\mu(E) = \eta(E)$ for $E \in \mathcal{E}$), kan vi spørge, om vi heraf kan slutte, at $\mu = \eta$ (dvs. $\mu(E) = \eta(E)$ for alle $E \in \mathcal{B}$).

Hertil kan vi betragte brolægningen $\mathcal{S}$ af de $S \in \mathcal{B}$ for hvilke $\mu(S) = \eta(S)$. Det følger direkte af Definition 1.2, at $\mathcal{S}$ er (Σc)-lukket og (næsten direkte) at $\mathcal{S}$ er $(\complement)$-lukket. Af Sætning 2 ses så, at såfremt $\mathcal{E}$ er $(\cap f)$-lukket og $\mathcal{E}$ frembringer $\mathcal{B}$, kan $\mu = \eta$ sluttes.

Anvendes dette resultat for den naturlige Borelstruktur på $\mathbb{R}$ ses, at *to sandsynlighedsmål på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, der stemmer overens på alle lukkede intervaller, er identiske.*

□

2.4 Brolægninger i topologiske rum

[1]

Lad $X = (X, \mathcal{G}(X))$ være et topologisk rum, dvs. X er en mængde og $\mathcal{G}(X)$, brolægningen af *åbne* mængder i X, er en $(\emptyset, X, \cup a, \cap f)$-lukket brolægning på X, se evt. Appendix 1.10 eller (Berg, 1997). Med $\mathcal{F}(X)$ betegner vi brolægningen af *lukkede* mængder i X, dvs. $\mathcal{F}(X) = \mathrm{co}\mathcal{G}(\mathrm{X})$. Dette er en $(\emptyset, X, \cup f, \cap a)$-lukket brolægning.

Definition 2.4.1 Ved den *naturlige Borelstruktur* på X forstås Borelstrukturen $\mathcal{B}(X)$ givet ved

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X)).$$

Bruges betegnelsen $\mathcal{B}(X)$, er det underforstået, at der foreligger en topologi på X og at $\mathcal{B}(X)$ er den naturlige Borelstruktur for den pågældende topologi. På samme måde er det underforstået, når man taler om en målelig mængde i et topologisk rum, at det drejer sig om en mængde i den naturlige Borelstruktur.

Det er klart, at $\mathcal{B}(X)$ også kan beskrives som Borelstrukturen frembragt af de lukkede mængder:

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{F}(X)). \tag{2.6}$$

De naturlige Borelstrukturer er langt de vigtigste Borelstrukturer i målteorien. Det er rent topologisk definerede strukturer. Der forekommer, som vi skal se siden-hen, andre vigtige Borelstrukturer i målteorien. Disse vil typisk være defineret ved inddragelse af egentlig målteoretisk struktur.

[1] Læsere, der ikke er fortrolige med generel topologi kan gerne antage, at $X = (X, d)$ er et metrisk rum og at $\mathcal{G}(X)$ er brolægningen af åbne mængder i den inducerede topologi (der mindes om disse begreber i Appendix 1.10). Se iøvrigt (Berg, 1997')

Blandt de naturlige Borelstrukturer er Borelstrukturerne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ på de euklidiske rum de vigtigste. Vi har tidligere i Eksempel 1.4 defineret $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ som $\sigma(\mathcal{J})$, hvor $\mathcal{J}$ er brolægningen af lukkede intervaller. At den nye definition stemmer overens hermed ses let. F.eks. kan vi udnytte, at der for en vilkårlig brolægning $\mathcal{E}$ på X gælder implikationerne

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(X) \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}(X), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{G}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{E}), \tag{2.8}$$

$$\mathcal{F}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{E}). \tag{2.9}$$

ØVELSE 1. Eftervis (2.7–9) og udnyt (2.7) og (2.8) til at vise det bebudede resultat: $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

For topologiske rum med "tællelighedsegenskaber" vil $\mathcal{B}(X)$ have nogle tilsvarende egenskaber. De egenskaber, vi er interesserede i for Borelstrukturer, er abstrakte og har således intet med topologi at gøre:

Definition 2.4.2 En Borelstruktur $\mathcal{B}$ er *tælleligt frembragt*, hvis der findes $\mathcal{E}$ tællelig så $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. En brolægning $\mathcal{E}$ på X er *separerende*, såfremt $x \in X,\ y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists E \in \mathcal{E} : 1_E(x) \neq 1_E(y)$. Borelstrukturen $\mathcal{B}$ er *tælleligt separerende*, hvis der findes en tællelig separerende delbrolægning af $\mathcal{B}$.

Sætning 2.4.1 *I et separabelt metriserbart rum vil enhver basis for topologien frembringe den naturlige Borelstruktur.*

Bevis. Lad X være separabelt og metriserbart og lad $\mathcal{G}$ være en basis for topologien. Vi skal vise, at $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(X)$. Da $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}(X)$, vil $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{B}(X)$. For at vise den omvendte inklusion udnytter vi, at topologien har en tællelig basis. Lad $\mathcal{H}$ være en sådan. Se på en vilkårlig åben mængde G_0. Lad $\mathcal{H}_0$ være brolægningen af alle $H \in \mathcal{H}$ for hvilke der findes $G \in \mathcal{G}$ med $H \subseteq G \subseteq G_0$ og vælg, for hver mængde $H \in \mathcal{H}_0$, en mængde $G_H \in \mathcal{G}$ med $H \subseteq G_H \subseteq G_0$. Vi påstår, at $\bigcup\{G_H \mid H \in \mathcal{H}_0\} = G_0$. Inklusionen "$\subseteq$" er oplagt. For at vise "$\supseteq$", ser vi på et $x \in G_0$. Da $\mathcal{G}$ er en basis, findes $G \in \mathcal{G}$, så $x \in G \subseteq G_0$. Da $\mathcal{H}$ er en basis, findes $H \in \mathcal{H}$, så $x \in H \subseteq G$. Så vil $H \in \mathcal{H}_0$. Vi ser nu, at $x \in G_H$, hvorfor $x \in \bigcup\{G_H \mid H \in \mathcal{H}_0\}$. Dette ræsonnement kan gennemføres for ethvert $x \in G_0$, så $G_0 \subseteq \bigcup\{G_H \mid H \in \mathcal{H}_0\}$. Dermed har vi vist, at $G_0 = \bigcup\{G_H \mid H \in \mathcal{H}_0\}$. Da denne foreningsmængde er en tællelig forening af mængder fra $\mathcal{G}$, må $G_0 \in \sigma(\mathcal{G})$. Derfor vil $\mathcal{G}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$, og $\mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ og dermed $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G})$ følger. □

Bemærkninger Ræsonnementet udnyttede kun, at X er separabelt metriserbart til at slutte, at der findes en tællelig basis for topologien, altså at X opfylder 2'det tællelighedsaksiom. Dermed gælder resultatet for denne noget mere generelle klasse af topologiske rum. At resultatet ikke gælder generelt, ingen gang for metriserbare rum, følger af Opgave 20. Endvidere kan vi bemærke, at sætningens konklusion umiddelbart kan skærpes til at enhver subbasis $\mathcal{G}$ for topologien frembringer $\mathcal{B}(X)$; man anvender blot sætningen på basen $\mathrm{cl}_{(\cap \mathrm{f})}\mathcal{G}$ for at indse det.

Korollar 2.4.1 *Den naturlige Borelstruktur i et separabelt metriserbart rum er tælleligt frembragt og tælleligt separerende.*

Bevis. Er X separabelt og metriserbart findes en tællelig basis $\mathcal{H}$ for topologien. I henhold til Sætning 2.4.1 vil $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(X)$, hvorfor $\mathcal{B}(X)$ er tælleligt frembragt. Vi viser dernæst, at $\mathcal{B}(X)$ er tælleligt separerende ved at vise, at $\mathcal{H}$ er separerende. Dette er klart, thi er $x \neq y$, vil $x \in X \setminus \{y\} \in \mathcal{G}(X)$, hvorfor der findes $H \in \mathcal{H}$ så $x \in H \subseteq X \setminus \{y\}$. Så vil $1_H(x) = 1$, men $1_H(y) = 0$. $\square$

Korollar 2.4.2 *For ethvert $n \in \mathbb{N}$, er $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tælleligt frembragt og tælleligt separerende.*

For et topologisk rum X er der især fire brolægninger, der interesserer os: $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{K}(X)$ og $\mathcal{B}(X)$. Her betegner $\mathcal{K}(X)$ brolægningen af *kompakte* delmængder af X, se evt. Appendix 1.10 eller (Berg, 1997 og 1997'). Mens såvel $\mathcal{G}(X)$ som $\mathcal{F}(X)$ frembringer $\mathcal{B}(X)$ behøver dette ikke gælde $\mathcal{K}(X)$, ingen gang hvis X er metriserbar (Opgave 19). Det gælder dog i ethvert euklidisk rum, mere generelt i de "fleste" *σ-kompakte* rum. At det topologiske rum X er *σ-kompakt* betyder, at der findes kompakte mængder K_n; $n \geq 1$, så $X = \bigcup_1^\infty K_n$.

Sætning 2.4.2 *I et σ-kompakt metriserbart rum X, specielt i ethvert euklidisk rum, frembringer de kompakte mængder den naturlige Borelstruktur: $\sigma(\mathcal{K}(X)) = \mathcal{B}(X)$.*

Bevis. Da $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$, vil $\sigma(\mathcal{K}(X)) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Lad nu (K_n) være en følge af kompakte mængder som overdækker $X : X = \bigcup_1^\infty K_n$. For en vilkårlig lukket mængde F, er mængderne $F \cap K_n$; $n \geq 1$ kompakte og disse mængder har F som foreningsmængde. Derfor vil $F \in \sigma(\mathcal{K}(X))$. Da således $\mathcal{F}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K}(X))$, sluttes den manglende inklusion $\mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K}(X))$. $\square$

Bemærkning Resultatet gælder i ethvert σ-kompakt Hausdorffrum.

2.5 Kompakte og semikompakte brolægninger

I mange, mange situationer, hvor man viser eksistens af et eller andet interessant matematisk objekt, vil man se, at kompakthed spiller en afgørende rolle. Således også i målteorien, når vi konstruerer de centrale længde- areal- og volumenmål som vi har peget på som motivation for hele teorien. Den kompakthed, vi får brug for, vedrører visse brolægninger, specielt brolægningerne $\mathcal{K}(X)$ i topologiske rum, men også andre abstrakt definerede brolægninger.

Lad os tage udgangspunkt i det abstrakte.

Definition 2.5.1 Lad X være en mængde. En brolægning $\mathcal{E}$ på X har den *endelige fællesmængdeegenskab*, såfremt $\bigcap \mathcal{E}_0 \neq \emptyset$ for enhver endelig delbrolægning $\mathcal{E}_0$ af $\mathcal{E}$. En brolægning $\mathcal{K}$ på X er en *kompakt brolægning* såfremt $\bigcap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$ for enhver delbrolægning $\mathcal{K}_0$ af $\mathcal{K}$, der har den endelige fællesmængdeegenskab. Og brolægningen $\mathcal{K}$ er en *semikompakt brolægning* såfremt $\bigcap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$ for enhver tællelig delbrolægning af $\mathcal{K}$, der har den endelige fællesmængdeegenskab.

Det følger direkte af definitionen (overvej!), at et topologisk rum er kompakt, hvis og kun hvis brolægningen $\mathcal{F}(X)$ er kompakt. For "store" rum X (ikke-kompakte rum) er brolaegningerne $\mathcal{K}(X)$ de ærketypiske kompakte brolægninger:

Sætning 2.5.1 *Er X et Hausdorffrum*[2]*, er $\mathcal{K}(X)$ en $(\emptyset, \cup f, \cap a)$-lukket kompakt delbrolægning af $\mathcal{F}(X)$.*

$*$ **Bevis.** Vi anser det for kendt, at $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$ og at $\mathcal{K}(X)$ er $(\cap a)$-lukket i et vilkårligt Hausdorffrum, se (Berg, 1997).[3] Det er klart, at $\emptyset \in \mathcal{K}(X)$ og at $\mathcal{K}(X)$ er $(\cup f)$-lukket. For at vise, at $\mathcal{K}(X)$ er en kompakt brolægning antages, at brolægningen $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}(X)$ har den endelige fællesmængdeegenskab. Vælg $K_0 \in \mathcal{K}_0$. Hvis nu $\bigcap \mathcal{K}_0 = \emptyset$, vil $K_0 \subseteq \bigcup \{\complement K | K \in \mathcal{K}_0, K \neq K_0\}$. Da mængderne $\complement K$ er åbne, findes endelig delbrolægning $\mathcal{K}_{00}$ af $\mathcal{K}_0$, så $K_0 \subseteq \bigcup \{\complement K | K \in \mathcal{K}_{00}\}$. Så må fællesmængden af mængderne i $\mathcal{K}_{00} \cup \{K_0\}$ være tom, hvilket strider mod forudsætningen. Vi må konkludere, at $\bigcap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$. $\square$

Vi slutter med at vise nogle resultater om abstrakte kompakte og semikompakte brolægninger. Først samler vi elementære egenskaber:

Sætning 2.5.2 *Lad $(X, \mathcal{K})$ være et brolagt rum.*

(i). *Hvis $\mathcal{K}$ er kompakt, så er $\mathcal{K}$ også semikompakt.*

(ii). *En delbrolægning af $\mathcal{K}$ er kompakt, hhv. semikompakt, hvis $\mathcal{K}$ er det.*

(iii). *Er $\mathcal{K}$ kompakt, kan vi tilføje $\emptyset$ og alle fællesmængder af mængder i $\mathcal{K}$ og bevare kompakthed, dvs. der gælder implikationen $\mathcal{K}$ kompakt $\Rightarrow$ $(\emptyset, \cap a)$-lukningen af $\mathcal{K}$ kompakt. For en semikompakt brolægning gælder, at $(\emptyset, \cap c)$-lukningen er semikompakt.*

---

[2] den topologisk ukyndige kan antage, at X er metriserbar.

[3] Jeg anfører kort beviserne herfor: Til $x \neq y$, punkter i Hausdorff-rummet X, bestemmes åbne disjunkte mængder $G(x|x, y)$ og $G(y|x, y)$ indeholdende hhv. x og y. Er K kompakt og $x \notin K$, findes E endelig delmængde af K så $K \subseteq \bigcup \{G(y|x, y) | y \in E\} = G(K|x, K)$. Sættes $G(x|x, K) = \bigcap \{G(x|x, y) | y \in E\}$, er $G(x|x, K)$ og $G(K|x, K)$ disjunkte åbne mængder indeholdende hhv. x og K. Så er $\complement K = \bigcup \{G(x|x, K) \mid x \in \complement K\}$ åben, hvorfor K er lukket. Så $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$. Dernæst bemærkes, at der gælder implikationen $K \in \mathcal{K}(X), F \in \mathcal{F}(X) \Rightarrow K \cap F \in \mathcal{K}(X)$ (overvej!). Det følger så let, at $\mathcal{K}(X)$ er $\cap a$-lukket i et Hausdorffrum.

(iv). *Er $\mathcal{K}(\emptyset, \cap f)$-lukket, er følgende betingelser ækvivalente: 1. $\mathcal{K}$ er kompakt; 2. $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{K}_0 \downarrow \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{K}_0$; 3. $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{K}_0$ nedad filtrerende $\Rightarrow \bigcap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$. Tilsvarende gælder, hvis $\mathcal{K}$ er $(\emptyset, \cap f)$-lukket, at følgende betingelser er ækvivalente: 1. $\mathcal{K}$ er semikompakt; 2. $(K_n) \subseteq \mathcal{K}$, $K_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \exists n : K_n = \emptyset$; 3. $(K_n) \subseteq \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$, $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \Rightarrow \bigcap_1^\infty K_n \neq \emptyset$.*

ØVELSE 1. Bevis dette!

Der gælder en vigtig skærpelse af egenskaben (iii):

Sætning 2.5.3 *(i). Er $\mathcal{K}$ en kompakt brolægning, da også $(\emptyset, \cup f, \cap a)$-lukningen af $\mathcal{K}$.*

(ii) Er $\mathcal{K}$ semikompakt, da også $(\emptyset, \cup f, \cap c)$-lukningen af $\mathcal{K}$.

Bevis. (i) er ikke så vigtig for os. Resultatet kræver udvalgsaksiomet. Beviset forbigås.

(ii): Antag, at $\mathcal{K}$ er semikompakt og at $\emptyset \in \mathcal{K}$. Lad $\mathcal{K}_1$ betegne brolægningen af endelige foreningsmængder af mængder i $\mathcal{K}$ og lad $\mathcal{K}_2$ betegne brolægningen af tællelige fællesmængder af mængder i $\mathcal{K}_1$. Så er $\mathcal{K}_2 = (\cup f, \cap c)$-lukningen af $\mathcal{K}$ (se Appendix 1.5, ligning (1.21)). For at vise, at $\mathcal{K}_2$ er semikompakt er det nok, i henhold til Sætning 2, (iii), at vise, at $\mathcal{K}_1$ er semikompakt. Antag nu, at $(K_n) \subseteq \mathcal{K}_1$ har den endelige fællesmængdeegenskab. Vi skal vise, at $\bigcap_1^\infty K_n \neq \emptyset$. Vælg, for hvert n, mængder $K_{n,m}$; $m \geq 1$ i $\mathcal{K}$, så $K_n = \bigcup_1^\infty K_{n,m}$ og så $K_{n,m} = \emptyset$ f.v.t.

Ud fra mængderne $K_{n,m}$ definerer vi et vist deltræ T af $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})} = \bigcup_0^\infty \mathbb{N}^n$ (med $\mathbb{N}^n = \{\emptyset\}$). Pr. definition vil $\emptyset \in T$ og for $n \in \mathbb{N}$ og $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ vedtager vi, at $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in T$, hvis og kun hvis $K_{1,k_1} \cap K_{2,k_2} \cap \cdots \cap K_{n,k_n} \neq \emptyset$ (se Figur 6).

Figur 6

Træet er endeligt forgrenet (dvs. fra hvert punkt er der højst endeligt mange fortsættelser) og indeholder vilkårligt lange grene ($\forall n \geq 0 : \mathbb{N}^n \cap T \neq \emptyset$). Af de træer, der udgår fra punkter i $\mathbb{N}^1 \cap T$ (på figuren er det træerne T_1, T_2 og T_3) vil mindst ét have de samme egenskaber. Hvis det f.eks. er T_2, kan vi fortsætte og finde et deltræ af T_2, udgående fra et punkt i $\mathbb{N}^2 \cap T_2$, der også har de nævnte egenskaber (endeligt forgrenet med vilkårligt lange grene). Således fortsættes. Alt i alt findes $(k_1, k_2, \cdots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, så $(k_1, \cdots, k_n) \in T$ for alle $n \geq 1$. Så har $(K_{n,k_n})_{n \geq 1}$ den endelige fællesmængdeegenskab. Da $\mathcal{K}$ er semikompakt, sluttes heraf, at $\bigcap_1^\infty K_{n,k_n} \neq \emptyset$. Så må også $\bigcap_1^\infty K_n \neq \emptyset$, hvilket skulle vises. $\square$

Det centrale ræsonnement i ovenstående bevis for (ii) spiller en vis rolle bl.a. i mængdeteori (uendelig kombinatorik). Det kan formuleres (lidt løst) som følger:

Sætning 2.5.4 (König' lemma) *Et endeligt forgrenet deltræ af $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, der indeholder vilkårligt lange grene, indeholder en uendelig gren.*

2.6 Nye Borelstrukturer ud fra gamle (del 1)

Under denne overskrift skal vi her blot diskutere to konstruktioner.

Definition 2.6.1 Lad $(X, \mathcal{B})$ være en Borelstruktur og lad $X_0 \subseteq X$. Ved *spor-Borelstrukturen* eller den *relative Borelstruktur* på X_0 forstås Borelstrukturen $(X_0, \mathcal{B}_0)$, hvor

$$\mathcal{B}_0 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{B}) = \{\mathrm{X}_0 \cap \mathrm{B} \mid \mathrm{B} \in \mathcal{B}\}.$$

Øvelse 1. Vis, at dette er en god definition, dvs. at $\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{B})$ er en Borelstruktur på X_0, når $\mathcal{B}$ er en Borelstruktur på X.

Vi ser, at de målelige mængder i X_0 er sporene af de målelige mængder i X. Bemærk, at disse mængder, altså mængderne i $\mathcal{B}_0 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{B})$, ikke behøver være målelige som delmængder af X. Faktisk er det let at se, at dette er tilfældet, hvis og kun hvis X_0 er målelig i X:

$$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow X_0 \in \mathcal{B}. \tag{2.10}$$

Øvelse 2. Bevis det!

Sætning 2.6.1 *Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum og antag, at $\mathcal{E}$ er et frembringersystem for $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Lad $X_0 \subseteq X$. Så er $\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{E})$ et frembringersystem i X_0 for spor-Borelstrukturen $\mathcal{B}_0$: $\mathcal{B}_0 = \sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{E}))$ (hvor $\sigma(\cdots)$ nu er mindste σ-algebra i X_0 indeholdende $\cdots$).*

Bevis. Da $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$, vil $\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{E} \subseteq \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$. Da $\mathcal{B}_0$ er en σ-algebra i X_0, følger heraf, at $\sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}_0$. For at vise den modsatte inklusion, ser vi på brolægningen $\mathcal{S}$ af $S \subseteq X$ så $\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathrm{S} \in \sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{E})$. Da $\mathcal{S}$ er en σ-algebra i X som indeholder $\mathcal{E}$, vil $\mathcal{S}$ indeholde $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$, hvilket betyder, at $\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathrm{B} \in \sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{E})$ for alle $B \in \mathcal{B}$. Dermed vil $\mathcal{B}_0 \subseteq \sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{E})$. $\square$

Resultatet kan kort skrives

$$\sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{E}) = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\sigma(\mathcal{E})). \tag{2.11}$$

Korollar 2.6.1 *Lad X være et topologisk rum og X_0 et delrum af X. Så er*

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{B}(\mathrm{X})) = \mathcal{B}(\mathrm{X}_0),$$

dvs., løst sagt, "sporet af den naturlige Borelstruktur er den naturlige Borelstruktur på sporet".

Bevis.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{B}(\mathrm{X})) = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\sigma(\mathcal{G}(\mathrm{X}))) &= \sigma(\mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}\mathcal{G}(\mathrm{X})) \\ &= \sigma(\mathcal{G}(X_0)). \qquad \square \end{aligned}$$

Den anden konstruktion af "nye" Borelrum, vi skal se på, vedrører produktdannelse.

Vi ser først på produkt af to Borelrum:

Definition 2.6.2 Lad $(X_1, \mathcal{B}_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2)$ være Borelrum. Ved *produkt-Borelstrukturen* forstås Borelrummet $(X, \mathcal{B})$, hvor $X = X_1 \times X_2$ og $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$. Vi anvender notationen $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ og kalder også $\mathcal{B}$ for *produkt σ-algebraen* af $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$. Mængder i $\mathcal{B}$ er *produkt-målelige*.

Idet en mængde af formen $A \times B$ undertiden kaldes et *rektangel*, og mængderne A og B for *rektanglets sider* (forudsat $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$), kan vi give udtryk for definitionen ved at sige, at produkt σ-algebraen er σ-algebraen frembragt af rektangler med målelige sider.

Svarende til Sætning 1 gælder:

Sætning 2.6.2 *Lad $\mathcal{E}_1$ og $\mathcal{E}_2$ være frembringersystemer i Borelrummene $(X_1, \mathcal{B}_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2)$: $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{E}_1)$, $\mathcal{B}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2)$. Antag desuden, at $X_1 \in \mathcal{E}_1$ og $X_2 \in \mathcal{E}_2$. Så er $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ et frembringersystem for $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.*

Bevis. Da $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, vil $\sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. For at vise den modsatte inklusion går vi frem i skridt: Først bemærkes, at $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$, dernæst, at $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ og så, at $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$. Første skridt er banalt. Andet skridt gennemføres ved at se på brolægningen $\mathcal{S}$ af de $S \subseteq X_1$ for hvilke $S \times E \in \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ for alle $E \in \mathcal{E}_2$. Så er $\mathcal{S}$ en σ-algebra, der indeholder $\mathcal{E}_1$. Derfor vil $\mathcal{S} \supseteq \sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}_1$, og $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$ følger, ganske som ønsket. På lignende vis sluttes nu, ud fra $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$, at $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$. Det var tredie skridt, som direkte fører til $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$. Da "$\supseteq$" allerede er vist, må der gælde "$=$" her. $\square$

Vi kan kort udtrykke det viste resultat i formlen:

$$\sigma(\mathcal{E}_1) \otimes \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2), \tag{2.12}$$

der altså er vist under forudsætning af at $X_1 \in \mathcal{E}_1$ og $X_2 \in \mathcal{E}_2$.

Lad $A \subseteq X \times Y$ og lad $x \in X$. Ved *x-sektionen* af A forstås mængden

$$A_x = \{y \mid (x, y) \in A\}.$$

Tilsvarende, hvis $y \in Y$, er *y-sektionen* af A givet ved

$$A^y = \{x \mid (x, y) \in A\}.$$

Se Figur 7. Nogle fremstillinger taler om "snit" i stedet for "sektioner".

Figur 7.

Sætning 2.6.3 *Produkt-målelige mængder har målelige sektioner.*

Bevis. Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være Borelrum. Lad $\mathcal{S}$ være brolægningen af $S \subseteq X \times Y$ for hvilke $\forall x \in X$: $S_x \in \mathcal{A}$ og $\forall y \in Y$: $S^y \in \mathcal{B}$. Vi skal vise, at $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$. Dette følger af at $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$ (banalt!) og af at $\mathcal{S}$ er en σ-algebra. Det sidste checkes let. □

ØVELSE 3. Gennemfør detaljerne i ovenstående bevis.

Advarsel. I forbindelse med produktstrukturer dukker et naturligt problem op: Er projektionen af en målelig mængde målelig? Hvis $\pi_X : X \times Y \to X$ og $\pi_Y : X \times Y \to Y$ er de to projektionsafbildninger, spørger vi, om man af $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ kan slutte $\pi_X(A) \in \mathcal{A}$ og $\pi_Y(A) \in \mathcal{B}$. Meget overraskende er svaret negativt, selv i særdeles pæne tilfælde ($X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Problemet stikker ret dybt og kan ikke behandles her. Det er et hovedproblem ("billedproblemet") i deskriptiv mængdelære og topologi og har en smuk løsning (der involverer Souslin operationen): Nok behøver $\pi_X(A)$ ikke være målelig, men mængden er dog så pæn, at vi ikke får problemer, når vi sidenhen involverer mål i betragtningerne.

Lad os kaste os over et andet problem: Er diagonalen i et produktrum målelig? Det problem kan vi løse fuldstændigt tilfredsstillende:

Sætning 2.6.4 *Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum og betegn med Δ diagonalen i $X \times X$. Da gælder, at Δ er målelig (i produkt-Borelstrukturen) hvis og kun hvis $\mathcal{B}$ er tælleligt separerende.*

Bevis. Vi viser først den mere nyttige del og antager, at $\mathcal{B}$ er tælleligt separerende. Lad $\mathcal{E}$ være en tællelig separerende delbrolægning af $\mathcal{B}$. Da

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} = \bigcap_{E \in \mathcal{E}} (E \times E) \cup (\complement E \times \complement E)$$

fremgår det, at Δ er målelig. Se iøvrigt Figur 8.

Figur 8.

Antag dernæst, at Δ er målelig. Udnyt (2.5) i Eksempel 1, §2.3 til at slutte, at der findes en tællelig delbrolægning $\mathcal{E}$ af $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ således, at $\Delta \in \sigma(\mathcal{E})$. Lad

$\mathcal{E} = \{A_n \times B_n \mid n \geq 1\}$. Sæt $\mathcal{B}_0 = \{B_n \mid n \geq 1\}$. Vi påstår, at $\mathcal{B}_0$ er separerende. Lad x og y være punkter i X således, at $1_{B_n}(x) = 1_{B_n}(y)$ for $n \geq 1$. Vi skal vise, at så er $x = y$. Af det givne følger, at

$$1_{A_n \times B_n}(x, x) = 1_{A_n \times B_n}(x, y); \quad n \geq 1.$$

Da brolægningen $\mathcal{S}$ af $S \subseteq X \times X$ for hvilke $1_S(x, x) = 1_S(x, y)$ er en σ-algebra (overvej!), følger det, at $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. Dermed vil $\Delta \in \mathcal{S}$, dvs. $1_\Delta(x, x) = 1_\Delta(x, y)$ og vi slutter, at $x = y$. $\square$

Som korollar hertil kunne vi pege på at diagonalen i $X \times X$ er målelig m.h.t. $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X \times X)$ når X er separabel metriserbar. Det er imidlertid ikke så overraskende, da diagonalen endog er en lukket delmængde af $X \times X$.

Lad os dernæst se på produktstrukturer i det topologiske tilfælde. Vi antager, at X og Y er, lad os blot sige metriserbare rum og forsyner rummene med de naturlige Borelstrukturer. Så kan vi betragte to Borelstrukturer i produktrummet $X \times Y$, dels $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, dels den naturlige Borelstruktur $\mathcal{B}(X \times Y)$ hørende til produkttopologien på $X \times Y$. Vi minder om at produkttopologien har $\mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(Y)$ som basis (velkendt for metriserbare rum).

Sætning 2.6.5 *Lad X og Y være metriserbare rum. Så vil*

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{B}(X \times Y). \tag{2.13}$$

Er X og Y separable metriserbare rum, gælder

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y) \tag{2.14}$$

Bevis. (2.13) følger af (2.12):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) &= \sigma(\mathcal{G}(X)) \otimes \sigma(\mathcal{G}(Y)) = \sigma(\mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(Y)) \\ &\subseteq \sigma(\mathcal{G}(X \times Y)) = \mathcal{B}(X \times Y). \end{aligned}$$

Er X og Y separable og metriserbare, er også $X \times Y$ separabel og metriserbar. Da $\mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(Y)$ er en basis for $X \times Y$, følger det af Sætning 4.1, at

$$\mathcal{B}(X \times Y) = \sigma(\mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(Y)) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y). \qquad \square$$

Korollar 2.6.2 *For $n \geq 1$, $m \geq 1$ er*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m). \tag{2.15}$$

Eksempel 1. For $n = m = 1$ finder vi af (2.15), at den naturlige Borelstruktur i $\mathbb{R}^2$ er frembragt af rektangler med målelige sider (m.h.t. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). $\square$

For endelige produktrum generaliseres ovenstående begreber og resultater på oplagt vis. F.eks. finder man, at

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Vedrørende uendelige produktrum er følgende definition hensigtsmæssig:

Definition 2.6.3 Lad $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ være en familie af Borelrum. Ved *produkt-Borelstrukturen* hørende til denne familie forstås Borelrummet $(X, \mathcal{B})$, hvor $X = \Pi_{i\in I} X_i$ og

$$\mathcal{B} = \sigma\left({}_{i\in I}\, \mathcal{B}_i \right).$$

Vi anvender notationen

$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}_i$$

for denne Borelstruktur og kalder også $\mathcal{B}$ for *produkt σ-algebraen* hørende til familien $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$. Mængderne i $\mathcal{B}$ kaldes de *produkt-målelige mængder*.

For vilkårlig produktrumsdannelse gælder udvidelser af resultaterne for endelig produktrumsdannelse. Således gælder f.eks. følgende udvidelse af (2.12):

$$\bigotimes_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i) = \sigma\left({}_{i\in I}\, \mathcal{E}_i \right). \tag{2.16}$$

Vi skal ikke nærmere kommentere disse resultater, men peger dog på følgende udvidelse af Sætning 5:

Sætning 2.6.6 *Lad $(X_n)_{n\geq 1}$ være en følge af metriserbare rum. Så er*

$$\bigotimes_{n\geq 1} \mathcal{B}\left(X_n\right) \subseteq \mathcal{B}\left(\Pi_{n\geq 1} X_n \right). \tag{2.17}$$

Er alle X_n'erne separable og metriserbare, gælder

$$\bigotimes_{n\geq 1} \mathcal{B}\left(X_n\right) = \mathcal{B}\left(\Pi_{n\geq 1} X_n \right) \tag{2.18}$$

Øvelse 4. Bevis dette! *Vejledning:* Bevisgangen fra Sætning 5 kan tilpasses situationen uden større vanskeligheder. Husk, at hvis X_n'erne er separable og metriserbare, så også $\Pi_{n\geq 1} X_n$. Desuden kan man udnytte, at ${}_{n\geq 1}\mathcal{G}(X_n)$ er en basis for topologien.

Opgaver til Kapitel II [4]

Opgave 1. Vis, at $\mathrm{cl}_{(\complement)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \cup \mathrm{co}(\mathcal{E})$.

$\rightarrow$ **Opgave 2.** Bevis følgende løst formulerede ækvivalenser:

$$(\complement, \cup f) \equiv (\complement, \cap f) \equiv (\emptyset, X, \setminus, \complement, \Delta, \cup f, \cap f).$$

F.eks. betyder første ækvivalens, at en brolægning er $(\complement, \cup f)$-lukket, altså en algebra, hvis og kun hvis den er $(\complement, \cap f)$-lukket.

Opgave 3. Et *gitter* er en $(\cup f, \cap f)$-lukket brolægning.

(i) Bevis, at

$$\mathrm{cl}_{(\cup \mathrm{f}, \cap \mathrm{f})}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cup \mathrm{f}, \cap \mathrm{f}} = \mathcal{E}_{\cap \mathrm{f}, \cup \mathrm{f}}.$$

(ii) Bevis, at såfremt $\mathcal{E} = \mathrm{co}\mathcal{E}$ (dvs. $\mathcal{E}$ er $(\complement)$-lukket), eller, mere generelt, såfremt $\mathrm{co}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{\cup \mathrm{f}, \cap \mathrm{f}}$, så gælder

$$\alpha(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cup f, \cap f} = \mathcal{E}_{\cap f, \cup f}.$$

(iii) Bevis, at såfremt $\mathcal{E}$ er endelig, er $\alpha(\mathcal{E})$ også endelig.

(iv) Bevis, at såfremt $\mathcal{E}$ er tællelig, er $\alpha(\mathcal{E})$ også tællelig.

Bemærkning Den energiske læser kan let (?) vise det mere generelle resultat, at såfremt $\mathrm{card}\,(\mathcal{E}) = \kappa$, hvor κ er et uendeligt kardinaltal, så er $\mathrm{card}\,(\alpha(\mathcal{E})) = \kappa$.

$*$ **Opgave 4.** Et σ-*gitter*, af og til også kaldet en *Borelsk brolægning* (eng. "Borelian"), er en $(\cup c, \cap c)$-lukket brolægning.

(i). Vis ved et eksempel, at de tre brolægninger $\mathrm{cl}_{(\cup \mathrm{c}, \cap \mathrm{c})}(\mathcal{E})$ (σ-*gitteret frembragt af* $\mathcal{E}$), $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ og $\mathcal{E}_{\delta\sigma}$ kan være forskellige.

(ii). Vis ved et eksempel, at σ-gitteret frembragt af $\mathcal{E}$ kan være meget "større" end $\mathcal{E}$. F.eks. kan man opnå, at de to brolægninger har kardinalitet hhv. $2^{\aleph_0}$ og $\aleph_0$.

$\rightarrow$ **Opgave 5.** Vis, at $(\complement, \cup f, \cup c) \equiv (\complement, \cup f, \cap c) \equiv (\complement, \cup c)$. Med andre ord: Vi kan karakterisere en σ-algebra som en algebra der tillige er lukket enten under stigende følger $((A_n) \subseteq \mathcal{E}, A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{E})$ eller under dalende følger $((A_n) \subseteq \mathcal{E}, A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{E})$.

Opgave 6. Lad os med $\mathrm{Bor}\,(\mathcal{E})$ betegne σ-gitteret frembragt af $\mathcal{E}$, jvf. Opgave 4.

[4] For flere af nedenstående opgaver anbefales det, at man konsulterer Appendix vedrørende notation m.v. Typisk antager vi stiltiende, at der arbejdes i en grundmængde X og at betragtede brolægninger er brolægninger på X. Ses på topologiske begreber, er det forudsat, at der er givet en topologi på X. Opgaver, der skønnes at være særligt vigtige er markeret med en pil, og opgaver, der skønnes at være svære er markeret med en stjerne.

(i). Vis, at $\operatorname{Bor}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ og at inklusionen kan være ægte.

(ii). Vis, at hvis vi har en generel metode til at danne σ-gitteret frembragt af en brolægning, kan vi også danne σ-algebraen frembragt af en brolægning.

Vejledning. Spørgsmålet er lidt løst formuleret. Se evt. Sætning 2.1, (ii) for at finde meningen hermed.

$*$ **Opgave 7.** Lad κ være et vilkårligt uendeligt kardinaltal og $\mathcal{E}$ en brolægning med $\operatorname{card}(\mathcal{E}) = \kappa$. Vis, at $\operatorname{card}(\sigma(\mathcal{E})) \leq 2^\kappa$. **Bemærkning** Hvis $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, f.eks. hvis $\kappa = 2^{\aleph_0}$, vil $\operatorname{card}(\sigma(\mathcal{E})) = \kappa$.

$*$ **Opgave 8.** I §2 definerede vi Baire-hierarkiet $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ ved at begynde med en σ-operation: $\mathcal{E} \curvearrowright \mathcal{E}_\sigma \curvearrowright \mathcal{E}_{\sigma\delta} \cdots$. Lad $(\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ være det hierarki man får ved at begynde med en δ-operation: $\mathcal{E} \curvearrowright \mathcal{E}_\delta \curvearrowright \mathcal{E}_{\delta\sigma} \cdots$. Sæt $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha \cap \mathcal{E}'_\alpha$. Vis, at $\operatorname{Bor}(\mathcal{E}) = \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha | \alpha < \omega_1\}$. **Bemærkning** Man kan vise en hel del om disse hierarkier, se f.eks. (Kuratowski, 1933). Mest interessant finder jeg det er, at der typisk hele tiden kommer nye mængder til gennem hierarkiet, dvs. $\forall \alpha < \beta < \omega_1 :$ $\mathcal{E}_\beta \setminus \mathcal{E}_\alpha \neq \emptyset$. Dette gælder f.eks. hvis $\mathcal{E}$ er brolægningen af lukkede intervaller på $\mathbb{R}$. Udfordring: Vis det!

$*$ **Opgave 9.** Lad X være et topologisk rum og antag, at X er et hereditært Lindelöf rum (gælder f.eks. hvis X er separabelt og topologien er induceret af en metrik, specielt dermed for de Euklidiske rum), se Appendix §1.10. Lad $\mathcal{G}_0$ være en vilkårlig subbasis for topologien og sæt $\mathcal{F}_0 = \operatorname{co}(\mathcal{G}_0)$. Bevis, at $\sigma(\mathcal{G}_0) = \sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(X)$. Illustrér dette resultat ved at pege på alternative frembringersystemer for den naturlige Borelstruktur i $\mathbb{R}$ i forhold til tekstens valg (de lukkede begrænsede intervaller).

$*$ **Opgave 10.** Det er forholdsvis let (?) at vise to interessante resultater om "størrelsen" af σ-algebraer, dels at der ikke findes σ-algebraer af kardinalitet $\aleph_0$, dels at "kontinuumshypotesen gælder for σ-algebraer". Mere præcist skal man vise, at enhver uendelig σ-algebra der højst har kontinuets mægtighed ($\aleph_0 \leq \operatorname{card}(\mathcal{B}) \leq 2^{\aleph_0}$) præcis har kontinuets mægtighed ($\operatorname{card}(\mathcal{B}) = 2^{\aleph_0}$). *Vejledning:* Lad $A_1, A_2, \cdots$ være forskellige mængder i σ-algebraen $\mathcal{B}$. Indfør en ækvivalensrelation R i X ved $xRy \Leftrightarrow 1_{A_n}(x) = 1_{A_n}(y)$ for alle $n \geq 1$. Bemærk, at hver ækvivalensklasse $[x]$ er målelig og at der er uendelig mange ækvivalensklasser.

$*$ **Opgave 11** Lad $\mathcal{E}$ og $\mathcal{S}$ være brolægninger på X og antag, at $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$ samt at $\mathcal{E}$ er en algebra. Bevis, at hvis det vides enten, at $\mathcal{S}$ er $(\cup c, \cap c)$-lukket eller at $\mathcal{S}$ er $(\Sigma c, \cap c)$-lukket, så kan man slutte, at $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. *Vejledning.* Udnyt idéen fra beviset for Sætning 2.3.2 (Dynkin's lemma). Er $\mathcal{S}$ $(\cup c, \cap c)$-lukket, sættes $\mathcal{H} = (\cup c, \cap c)$-afslutningen af $\mathcal{E}$ og beviset kan føres ved at udnytte implikationerne

$$\mathcal{H}(\complement) - \text{lukket} \wedge \mathcal{H}(\cap f) - \text{lukket} \Rightarrow \mathcal{H} \text{ algebra} \Rightarrow \mathcal{H}\sigma - \text{algebra} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}.$$

I beviset for at $\mathcal{H}$ er $(\complement)$-lukket kan man se på brolægningen af $F \in \mathcal{H}$, så også $\complement F \in \mathcal{H}$.

Er $\mathcal{S}(\Sigma c, \cap c)$-lukket, ses på $\mathcal{H} = (\Sigma c, \cap c)$-afslutningen af $\mathcal{E}$. Man viser først, at $\mathcal{H}$ er $(\cap f)$-lukket. Så må $\mathcal{H} = (\Sigma c, \cap c)$-afslutningen af $\mathcal{E}$. Udnyttes dette, vises let, at $\mathcal{H}$ er $(\complement)$-afsluttet.

Opgave 12. Lad $\mathcal{E}$ være en $(\cap f)$-lukket brolægning på X og sæt $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Antag nu, at $(\mu_n)_{n\geq 1}$ er en følge af sandsynlighedsmål på $(X, \mathcal{B})$ og at $\lim \mu_n(E)$ eksisterer for alle $E \in \mathcal{E}$. Vis, at så vil $\lim \mu_n(E)$ eksistere for alle $E \in \alpha(\mathcal{E})$. Vis ved et eksempel, at $\lim \mu_n(E)$ ikke behøver eksistere for alle $E \in \mathcal{B}$. Den interesserede studerende bør overveje, om der sker nogen væsentlig ændring, hvis man i stedet for en følge af mål tager udgangspunkt i et net $(\mu_\alpha)_{\alpha \in D}$ af mål.

$\to$ **Opgave 13.** *Fordelingsfunktionen* for et sandsynlighedsmål μ på $\mathbb{R}$ (underforstået: udstyret med den naturlige Borelstruktur) er funktionen $F_\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ givet ved $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]); x \in \mathbb{R}$. Bevis, at to sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, der har samme fordelingsfunktion, er identiske: $F_\mu = F_\eta \Rightarrow \mu = \eta$.

Opgave 14. Hvert af følgende systemer af intervaller frembringer den naturlige Borelstruktur i $\mathbb{R}$: De lukkede intervaller (det var definitionen!), de åbne intervaller, de halvåbne intervaller af typen $]a, b]$, tilsvarende, men af typen $[a, b[$, de uendelige intervaller af typen $]-\infty, x]$, samme, men af typen $]-\infty, x[$, $[x, \infty[$ eller $]x, \infty[$ og, endelig, en af ovenstående tilfælde men med den restriktion, at alle endepunkter i de betragtede intervaller tilhører en i forvejen fastlagt tæt delmængde af $\mathbb{R}$ (f.eks. $\mathbb{Q}$). Vis det!

Opgave 15. Vis, at for en vilkårlig brolægning $\mathcal{E}$, er

$$\alpha(\mathcal{E}) = \bigcup \{\alpha(\mathcal{E}_0) | \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E},\ \mathcal{E}_0 \text{ endelig}\}.$$

$\to$ **Opgave 16.** Lad μ være et mål på $\mathbb{R}$ (dvs. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ er et målrum), så $\mu([a, b]) < \infty$ for $-\infty < a < b < \infty$.

(i) Vis, at der findes $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$\forall -\infty < a < b < \infty : \mu(]a, b] = F_\mu(b) - F_\mu(a)$$

og gør rede for at F_μ er entydigt bestemt på nær en additiv konstant.

(ii) Vis, at F_μ er ikke-aftagende og kontinuert fra højre. Hvad betyder det for målet, hvis F_μ er kontinuert (så kaldes målet et *kontinuert* mål)? **Bemærkning**: Et hovedresultat i målteorien (se senere) sikrer, at der til enhver sådan funktion hører et mål. Hvilket mål mon hører til funktionen $F = \mathrm{id}_\mathbb{R}$, identiteten på $\mathbb{R}$?

(iii) Vis, at hvis målene μ og η opfylder betingelsen $F_\mu = F_\eta$ på nær en konstant ($\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$: $F_\mu(x) = F_\eta(x) + c$), så er $\mu = \eta$.

(iv) Vis, at hvis $\mu(\mathbb{R}) < \infty$, kan F_μ vælges, så $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x]);\ x \in \mathbb{R}$. **Bemærkning** Er μ et sandsynlighedsmål, kaldes F_μ *fordelingsfunktionen* for μ. Ifølge (iii) bestemmer fordelingsfunktionen sandsynlighedsmålet entydigt.

$*$ **Opgave 17.** Forsøg at generelisér resultaterne fra Opgave 16 til mål på $\mathbb{R}^2$ (eller, generelt, på $\mathbb{R}^n$). *Vejledning.* Man bør sigte på at vise en formel af følgende form:

$$\mu(]a_1,b_1]\times]a_2,b_2]) = F_\mu(b_1,b_2) - F_\mu(a_1,b_2) - F_\mu(b_1,a_2) + F_\mu(a_1,a_2).$$

Opgave 18. Find alle Borelstrukturer på $\mathbb{N}$. Er der separerende Borelstrukturer blandt dem?

Opgave 19. Bestem den naturlige Borelstruktur $\mathcal{B}(X)$ når X er et diskret topologisk rum (ækvivalent: X er metriserbar med den diskrete metrik). Undersøg, for hvilke diskrete rum, $\mathcal{K}(X)$ frembringer $\mathcal{B}(X)$.

Opgave 20. Vis, at der findes metriserbare rum X med en basis for topologien, der ikke frembringer $\mathcal{B}(X)$. *Vejledning.* Se på et passende diskret rum.

$*$ **Opgave 21.** Lad X være et Hausdorffrum. Definér brolægningerne $\mathcal{F}_k$ og $\mathcal{G}_k$ af *k-lukkede*, hhv. *k-åbne* mængder ved

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k &= \{F \subseteq X \mid \forall K \in \mathcal{K}(X) : K \cap F \in \mathcal{K}(X)\}, \\ \mathcal{G}_k &= \mathrm{co}\mathcal{F}_\mathrm{k}. \end{aligned}$$

Vis, at $\mathcal{G}_k$ er en topologi på X som er finere end den givne topologi: $\mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{G}_k$.

Bemærkning Topologien med $\mathcal{G}_k$ som åbne mængder hedder *k-topologien.* Der findes eksempler på rum, hvor denne topologi er strengt finere end den givne. Et spøjst eksempel er $X = \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ med $\mathcal{G}(X) = \mathcal{P}(\mathbb{N})\cup\{G \mid G \text{ har tæthed } 1\}$; her har $G \subseteq X$ tæthed 1, hvis $\lim(|G \cap [1,n]|/n) = 1$, hvor $|\cdots|$ er "antallet af elementer i $\ldots$".

$*$ **Opgave 22.** Lad $X = \{0,1\}$ i diskret topologi og med diskret Borelstruktur. Lad T være en vilkårlig mængde. Vis, at hvis $\mathrm{card}\,(\mathrm{T}) > \aleph_0$, f.eks. hvis $T = [0,\infty[$, vil ingen singleton i produkt-Borelstrukturen i X^T være målelig. Slut heraf, at $\mathcal{B}(X^T)$ er strengt finere end produkt Borelstrukturen. *Vejledning.* Enhver målelig mængde A i produkt-Borelstrukturen er "tælleligt determineret", dvs. der findes T_0 tællelig $\subseteq T$ så $x \in A \wedge y|T_0 = x|T_0 \Rightarrow y \in A$.

Opgave 23. Lad R være en ækvivalensrelation i mængden X og lad $\theta : X \to X/R$ være den naturlige projektion i kvotientrummet. Lad $\mathcal{B}$ være en Borelstruktur på X. Definér en brolægning $\mathcal{E}$ på X/R ved $E \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \theta^{-1}(E) \in \mathcal{B}$. Vis, at $\mathcal{E}$ er en Borelstruktur på X/R.

Bemærkning Denne Borelstruktur hedder *kvotient-Borelstrukturen* i X/R.

Opgave 24. Bestem $\alpha(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$ for brolægningen $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ skitseret på Figur 9

Figur 9

Opgave 25. Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum. Den *inducerede ækvivalensrelation* er ækvivalensrelationen $\approx$ i X givet ved $x \approx y \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}$: $1_B(x) = 1_B(y)$. Ækvivalensklasserne i denne relation udgør *atomerne* hørende til $\mathcal{B}$. Ækvivalensklassen indeholdende x betegnes $[x]$. Vis, at hvis $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$, er

$$[x] = \bigcap\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\} = \bigcap\{A \in \mathcal{E} \cup \mathrm{co}\mathcal{E} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A}\} \tag{2.19}$$

og slut, at alle atomer hørende til $\mathcal{B}$ er målelige, hvis $\mathcal{B}$ er tælleligt frembragt.

Vis, at hvis $\mathcal{E} = \{A_1, \cdots, A_n\}$ består af n mængder, så indeholder $\sigma(\mathcal{E})$ højst 2^n atomer og $\sigma(\mathcal{E})$ selv indeholder højst 2^{2^n} mængder.

$*$ **Opgave 26.** Lad $(X, \mathcal{E})$ være et brolagt rum. Vis følgende resultater:

(i). Er $\mathcal{E}$ $(\cup f, \cap f)$-lukket, så er brolægningen af differenser $E_1 \setminus E_2$ med $E_1 \in \mathcal{E}, E_2 \in \mathcal{E}$ en semiring.

(ii) Er $\mathcal{E}$ en semiring, så består ringen frembragt af $\mathcal{E}$ af alle foreningsmængder af endeligt mange parvist disjunkte mængder i $\mathcal{E}$.

(iii) Anvend (i) med $\mathcal{E} = \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$ og anvend dernæst (ii) på den fremkomne semiring.

Opgave 27. Antag, at Borelstrukturen $(X, \mathcal{B})$ er separerende og at $\mathcal{B}_0$ er et frembringersystem for $\mathcal{B}$. Bevis, at $\mathcal{B}_0$ er separerende. Slut, at en tælleligt frembragt og separerende Borelstruktur er tælleligt separerende.

Opgave 28. I Opgave 18 bestemte vi samtlige Borelstrukturer på $\mathbb{N}$. Her beder vi læseren bestemme de forskellige Borel-isomorfiklasser for disse Borelstrukturer og vise, at der er $2^{\aleph_0}$-mange forskellige isomorfiklasser blandt disse.

Bemærkning. Med rette kan man kritisere dette resultat. F.eks. virker det lidt "fjollet", at Borelstrukturerne $\sigma(\{A\})$, hvor A gennemløber de endelige delmængder af $\mathbb{N}$, ikke alle tilhører samme Borel-isomorfiklasse. Sagen er den, at Borel-isomorfibegrebet så at sige "tager hensyn" til punkterne i grundmængden, her $\mathbb{N}$. Vil man undgå dette, kan man enten modificere isomorfibegrebet, så man "glemmer" punkterne i grundmængden, eller man kan nøjes med at studere separerende Borelstrukturer (for $\mathbb{N}$ er der så kun tale om én interessant Borelstruktur, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Opgave 29. Lad μ_1 og μ_2 være sandsynlighedsmål på Borelstrukturen $(X, \mathcal{B})$ og antag, at $\mathcal{E}$ frembringer $\mathcal{B}$. Påstand: Hvis $\mu_1 = \mu_2$ på $\mathcal{E}$, er $\mu_1 = \mu_2$. Find fejlen i følgende "bevis" for påstanden: Sæt $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{B} \mid \mu_1(S) = \mu_2(S)\}$. Så vil $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Hvis $S \in \mathcal{S}$, vil $\complement S \in \mathcal{S}$ (klart!) og hvis $(S_n)_{n \geq 1}$ er parvis disjunkte mængder i $\mathcal{S}$, vil $\bigcup S_n \in \mathcal{S}$. Da $\mathcal{S}$ således er en σ-algebra, og $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$, vil $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$.

Er påstanden rigtig?

$*$ **Opgave 30.** Vis, at for en "tilstrækkelig stor" mængde X, vil $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(X)$ være en ægte delbrolægning af $\mathcal{P}(X \times X)$. Vis herved, at konklusionen (2.14) i Sætning 2.6.5 ikke behøver gælde når forudsætningen om seperabilitet droppes.

Opgave 31. Vis, at den naturlige omvendte sætning til Sætning 2.6.3 ikke gælder.

Opgave 32. Vis, at Sætning 2.6.2 er gal uden forudsætningen om at $X_1 \in \mathcal{E}_1$, hhv. $X_2 \in \mathcal{E}_2$.