Kapitel 3

Målteoriens afbildninger

3.1 Målelige afbildninger

Det er god matematisk skik, hver gang man har indført en eller anden struktur – vektorrum, metriske rum, topologiske rum, grupper eller, hvad det nu kan være – at se nærmere på strukturbevarende afbildninger. Således også, når talen er om Borelrum. Det mest frugtbare begreb – i øvrigt analogt med kontinuitet for topologiske rum – viser sig at være følgende:

Definition 3.1.1 Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være Borelrum. Ved en *målelig afbildning*, mere præcist, en $\mathcal{A}, \mathcal{B}$-*målelig afbildning*, forstås en afbildning $f : X \to Y$ således, at $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ for alle $B \in \mathcal{B}$.

Betingelsen "$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ for alle $B \in \mathcal{B}$" udtrykker vi også kort

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}.$$

Vi anvender altså den notation, at $f^{-1}(\mathcal{B})$ står for brolægningen af alle mængder af formen $f^{-1}(B)$ for et $B \in \mathcal{B}$.

Hvis X og Y er topologiske rum (som altid kan læseren gerne antage, at det drejer sig om metriserbare rum) og $f : X \to Y$ en afbildning af X ind i Y, siger vi, at f er *målelig*, hvis f er målelig med hensyn til de naturlige Borelstrukturer $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$; f er altså målelig hvis og kun hvis urbilledet $f^{-1}(B)$ af enhver Borelmængde i Y er en Borelmængde i X, kort udtrykt, hvis og kun hvis

$$f^{-1}(\mathcal{B}(Y)) \subseteq \mathcal{B}(X).$$

Eksempel 1. Lad $(X, \mathcal{A})$ være et Borelrum. Til en delmængde $A \subseteq X$ kan vi tilordne indikatorfunktionen $1_A : X \to \mathbb{R}$. Vi viser nu biimplikationen

$$1_A \text{ målelig } \Leftrightarrow A \text{ målelig },$$

i detaljer:

$$1_A \ (\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{-målelig} \ \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Implikationen "$\Rightarrow$" følger af at $A = (1_A)^{-1}(\{1\})$. Den modsatte implikation følger af at $(1_A)^{-1}(B)$ er en af følgende 4 mængder: $\emptyset, A, \complement A, X$. $\square$

ØVELSE 1. Vis, at hvis $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ er målelig, så er også $-f$ målelig.

Sætning 3.1.1 *Restriktionen af en målelig afbildning er målelig.*

Bevis og præcisering. Vi antager, at $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ er Borelrum og at $f : X \to Y$ er målelig. Desuden ses på en delmængde $X_0 \subseteq X$ og på restriktionen $f_0 = f|X_0$. Bemærk, at X_0 kan være en hvilken som helst delmængde af X; den behøver således ikke være målelig. Udsagnet i sætningen er, at $f_0 : X_0 \to Y$ er målelig og her tænkes, naturligvis, på $(\mathrm{tr}_{X_0}\mathcal{A}, \mathcal{B})$-målelighed. Dette er imidlertid klart, thi for $B \in \mathcal{B}$ sluttes af

$$f_0^{-1}(B) = X_0 \cap f^{-1}(B) = \mathrm{tr_{X_0} f^{-1}(B)},$$

at $f_0^{-1}(B) \in \mathrm{tr}_{X_0}(\mathcal{A})$. $\square$

Sætning 3.1.2 *Sammensætningen af målelige afbildninger er målelig.*

Bevis og præcisering. $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ og $(Z, \mathcal{C})$ er givne Borelrum og for afbildningerne $g : X \to Y$ og $f : Y \to Z$ er det givet, at g er $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-målelig og f er $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-målelig. Vi skal vise, at $f \circ g$ er $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-målelig.

Dette følger af den generelle formel

$$(f \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}(f^{-1}(C)).$$

Hvis nemlig $C \in \mathcal{C}$, vil $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ og så vil $g^{-1}(f^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. $\square$

Sætning 3.1.3 *Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være Borelrum og $f : X \to Y$ en afbildning af X ind i Y. Antag tillige, at der er givet en brolægning $\mathcal{B}_0$ på Y som frembringer $\mathcal{B} : \sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$. Da gælder biimplikationen:*

$$f \ \textit{målelig} \ \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{B}_0) \subseteq \mathcal{A}.$$

Bevis. Implikationen "$\Rightarrow$" er banal og den nyttige implikation "$\Leftarrow$" følger let ved at bemærke, at brolægningen $\mathcal{S}$ af de $S \subseteq Y$ for hvilke $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ er en σ-algebra som indeholder frembringersystemet $\mathcal{B}_0$. $\square$

ØVELSE 2. Gennemfør beviset ovenfor i detaljer.

Sætning 3 har – sammenholdt med tidligere resultater – en række vigtige korollarer:

Korollar 3.1.1 *Enhver kontinuert afbildning af ét topologisk rum ind i et andet er målelig.*

Bevis. Er $f : X \to Y$ kontinuert, vil $f^{-1}(\mathcal{G}(Y)) \subseteq \mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Da $\mathcal{G}(Y)$ er et frembringersystem for $\mathcal{B}(Y)$, følger resultatet af Sætning 3. $\square$

Korollar 3.1.2 *Enhver opad halvkontinuert og enhver nedad halvkontinuert funktion (med værdier i $\mathbb{R}$ eller i $\bar{\mathbb{R}}$) er målelig.*

Bevis. Antag f.eks., at $f : X \to \mathbb{R}$ er nedad halvkontinuert. Så vil mængderne $\{f > a\} = f^{-1}(]a, \infty[)$; $a \in \mathbb{R}$ være åbne og dermed målelige. Da mængderne $]a, \infty[$; $a \in \mathbb{R}$ frembringer $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, følger resultatet af Sætning 3. $\square$

Korollar 3.1.3 *Lad X være et Borelrum og antag at $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ er målelig; $n \geq 1$. Så er også følgende afbildninger af X ind i $\bar{\mathbb{R}}$ målelige:*

$$\sup_{n\geq 1} f_n, \quad \inf_{n\geq 1} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Bevis. Måleligheden af $\sup f_n$ følger af formlen

$$\{\sup_{n\geq 1} f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\},$$

idet vi igen udnytter, at mængderne $]a, \infty]$; $a \in \mathbb{R}$ frembringer $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Da $\inf f_n = -\sup(-f_n)$, ses nu at $\inf f_n$ er målelig. Da

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} f_m$$

og

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} f_m,$$

følger måleligheden af disse funktioner nu let. $\square$

Korollar 3.1.4 *Lad $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ og $(Z, \mathcal{C})$ være Borelrum og antag, at afbildningerne $f : X \to Y$ og $g : X \to Z$ er målelige. Så er også diagonalafbildningen $F : X \to Y \times Z$ givet ved $F(x) = (f(x), g(x))$; $x \in X$ målelig.*

Bevis. Når vi her taler om målelighed af $F : X \to Y \times Z$ menes (naturligvis) målelighed m.h.t. den givne Borelstruktur $\mathcal{A}$ på X og produkt-Borelstrukturen $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ på $Y \times Z$. Udnyt nu, at $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ er et frembringersystem for $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ og at det for enhver mængde $B \times C \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ gælder, at $F^{-1}(B \times C) = f^{-1}(B) \cap g^{-1}(C)$, en målelig mængde. $\square$

$*$ **Bemærkning** Hvis $(X, \mathcal{A})$ er et Borelrum og $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ er en familie af Borelrum og $(f_i)_{i\in I}$ en familie af målelige afbildninger af X ind i Y_i'erne, så er diagonalafbildningen $x \curvearrowright (f_i(x))_{i\in I}$ målelig. Beviset følger ovenstående tankegang, men forbigås.

Korollar 3.1.5 *Lad* $(X, \mathcal{A})$ *være et Borelrum, lad* Y *være et separabelt metriserbart rum og antag at* $f : X \to Y$ *og* $g : X \to Y$ *er to målelige afbildninger. Da er* $\{f = g\} = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ *målelig.*

Bevis. Lad os først præcisere, at måleligheden af f og g (naturligvis) er m.h.t. $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}(Y)$ og at påstanden er, at $\{f = g\} \in \mathcal{A}$. Dette følger af Korollar 4 og sætningerne 2.6.4 og Korollar 2.4.1, idet

$$\{f = g\} = F^{-1}(\Delta),$$

hvor F er diagonalafbildningen $x \curvearrowright (f(x), g(x))$ og Δ er diagonalen i $Y \times Y$. $\square$

Hyppigt studerer vi reelle funktioner defineret på et Borelrum. Fra Korollarerne 1 og 2 ved vi, at kontinuerte og halv-kontinuerte funktioner er målelige og at supremumsdannelse m.v. bevarer målelighed. Løst sagt gælder, at alle kendte tællelige operationer bevarer målelighed. Lad os samle de vigtigste resultater i en lidt løst formuleret sætning:

Sætning 3.1.4 *Lad* X *være et Borelrum og* $f, g, f_n; n \geq 1$ *reelle eller udvidet reelle målelige funktioner defineret på* X*. Da gælder, at også følgende funktioner er målelige, forudsat de er veldefinerede:*

$$|f|, f + g, f - g, f \cdot g, f/g, \max(f, g), \min(f, g), \lim_{n\to\infty} f_n, \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Bevis og præcisering. Afbildningen $t \curvearrowright |t|$ af $\bar{\mathbb{R}}$ ind i $\bar{\mathbb{R}}$ er kontinuert og dermed målelig. Så er sammensætningen af $x \curvearrowright f(x)$ og $t \curvearrowright |t|$, altså funktionen $|f|$, målelig.

Afbildningen $(t, s) \curvearrowright t+s$ af $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ er kontinuert og dermed målelig. Så er sammensætningen af $x \curvearrowright (f(x), g(x))$ (målelig ifølge Korollar 4) med $(t, s) \curvearrowright t + s$, altså funktionen $f+g$, målelig. Hvis f.eks. f og g kan antage værdien $+\infty$, men ikke $-\infty$, indses på lignende vis, at $f+g$ er målelig, idet man så udnytter at $(t, s) \curvearrowright t+s$ er en kontinuert afbildning af $]-\infty, \infty]\times]-\infty, \infty]$ ind i $]-\infty, \infty]$.

På lignende måde, ved at se på afbildningerne der sender (t, s) over i hhv. $t - s$, $t \cdot s$, $\max(t, s)$ og $\min(t, s)$ ses, at $f - g, f \cdot g$, $\max(f, g)$ og $\min(f, g)$ er målelige. For kvotienten f/g (med $g(x) \neq 0$ for $x \in X$) ses på afbildningen $(t, s) \curvearrowright t/s$ af $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ind i $\mathbb{R}$ og måleligheden af f/g udledes.

Hvis $(f_n(x))_{n\geq1}$ er konvergent i $\bar{\mathbb{R}}$ for alle $x \in X$, i så fald siges som bekendt (?), at funktionsfølgen $(f_n)_{n\geq1}$ er *punktvis konvergent* i X, er $\lim f_n = \liminf f_n$ som er målelig ifølge Korollar 3.

Da $\sum f_n = \lim s_n$, hvor (s_n) er afsnitsfølgen hørende til $\sum f_n$, følger målelighed af det allerede beviste – de enkelte s_n'er er jo målelige som summer og $\lim s_n$ er så målelig ifølge ovenstående. $\square$

I mange videregående undersøgelser studerer man afbildninger med værdier i mere generelle strukturer end $\mathbb{R}$ eller $\bar{\mathbb{R}}$. Vi beviser følgende resultat for den type afbildninger:

$*$ **Sætning 3.1.5** *Lad $X = (X, \mathcal{A})$ være et Borelrum og $Y = (Y, \mathcal{B}(Y))$ et topologisk rum med den naturlige Borelstruktur. Lad endvidere $(f_n)_{n\geq 1}$ være en følge af målelige afbildninger af X ind i Y.*

(i) *Hvis Y er metriserbar og $f_n \to f$, punktvis, så er f målelig.*

(ii) *Hvis Y er separabel og metriserbar med en fuldstændig metrik, så er mængden af $x \in X$ for hvilke $\lim f_n(x)$ eksisterer, målelig.*

Bevis (i): Vi vil bevise, at $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ for alle $F \in \mathcal{F}(Y)$. Lad $F \in \mathcal{F}(Y)$ være givet. Så findes åbne mængder G_ν; $\nu \geq 1$, så $F = \bigcap_1^\infty G_\nu = \bigcap_1^\infty \bar{G}_\nu$ (tag $G_\nu = \{y | d(y, F) < \frac{1}{\nu}\} = \{y | \exists y' \in F : d(y, y') < \frac{1}{\nu}\}$). Så er

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{\nu \geq 1} \{x \mid f_n(x) \in G_\nu \text{f.v.t.}\} = \bigcap_{\nu\geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} f_m^{-1}(G_\nu),$$

og $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ følger.

(ii): Se på produktrummet $Y \times Y \times \cdots = Y^{\mathbb{N}}$ med produkt-Borelstrukturen, som vi benævner $\mathcal{B}$. I $Y^{\mathbb{N}}$ studerer vi mængden L givet ved

$$L = \{(y_n) \in Y^{\mathbb{N}} \mid (y_n) \text{ er konvergent }\}.$$

Lad $\delta : X \to Y^{\mathbb{N}}$ være diagonalafbildningen $x \curvearrowright (f_n(x))_{n\geq 1}$. Ifølge bemærkningen til Korollar 4 er δ målelig. Da

$$\{x \mid (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ konvergent }\} = \delta^{-1}(L),$$

indser vi, at vi kan vise det ønskede, hvis vi kan vise, at L er målelig.

For at vise, at $L \in \mathcal{B}$, vælger vi en fuldstændig metrik d på Y som inducerer topologien og noterer os, at

$$L = \bigcap_{\nu\geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n > m > N} \{(y_k)_{k\geq 1} \in Y^{\mathbb{N}} \mid d(y_n, y_m) \leq \frac{1}{\nu}\}.$$

Her er sidste fællesmængde fællesmængden over alle par (n, m) med $n > m > N$. Da mængderne $\{d(y_n, y_m) \leq \frac{1}{\nu}\}$, der optræder her, er lukkede, ses at $L \in \sigma(\mathcal{F}(Y^{\mathbb{N}})) = \mathcal{B}(Y^{\mathbb{N}})$. Af Sætning 2.6.5 følger imidlertid, at $\mathcal{B}(Y^{\mathbb{N}}) = \mathcal{B}$ og så må $L \in \mathcal{B}$, som ønsket. $\square$

$*$ **Korollar 3.1.6** *Lad* $X = (X, \mathcal{A})$ *være et Borelrum og lad* Y *være et separabelt topologisk rum, der er metriserbar med en fuldstændig metrik. Lad* $(f_n)_{n\geq 1}$ *være en følge af målelige afbildninger af* X *ind i* Y*. Betegn med* A *mængden af* $x \in X$ *for hvilke punktfølgen* $(f_n(x))_{n\geq 1}$ *er konvergent. Da vil, for en vilkårlig målelig "hjælpefunktion"* h*:* $X \to Y$*, funktionen* f *givet ved*

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x) & ; \quad x \in A \\ h(x) & ; \quad x \in \complement A \end{cases}$$

være målelig.

Bevis. Lad $g_n = f_n|A$, restriktionen af f_n til A; $n \geq 1$. Ifølge (i) i Sætning 5 er $g = \lim g_n$ en målelig afbildning af A ind i Y (her udstyres A – naturligvis – med spor-Borelstrukturen). For en vilkårlig målelig delmængde B af Y er

$$f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cup (h^{-1}(B) \setminus A),$$

som er målelig. Vi har jo fra Sætning 5, at A er målelig og så vil $g^{-1}(B) \in \mathrm{tr_A}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ og også $h^{-1}(B) \setminus A$ vil tilhøre $\mathcal{A}$. $\square$

Korollaret siger kort, at for en følge af målelige funktioner $(f_n)_{n\geq 1}$ er $\lim f_n$ også målelig, ligegyldigt, hvordan $\lim f_n(x)$ defineres uden for konvergensmængden (blot det sker efter en målelig hjælpefunktion).

Hvis f.eks. f_n'erne afbilder X ind i $\overline{\mathbb{R}}$, kan vi ud fra målelighed af f_n'erne slutte målelighed af funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x) & \text{hvis } (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ konvergerer} \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

$*$ **Bemærkning** Klassen af topologiske rum, der optræder i Sætning 5 og i korollaret, altså de separable rum, der er metriserbare med en fuldstændig metrik, er en meget nyttig klasse af topologiske rum at arbejde med i mange sammenhænge. Rummene i denne klasse kaldes *polske rum* efter en polsk skole af matematikere, der især har bidraget til deres teori.

3.2 Approksimation

For mange matematiske teorier er det frugtbart at opsøge simple "byggesten", dvs. særligt simple eksempler på objekter hørende til teorien, og så undersøge, om mere indviklede, eventuelt alle, objekter af den betragtede slags kan fås ud fra byggesten ved passende operationer.

Definition 3.2.1 Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være Borelrum. En afbildning $f : X \to Y$ siges at være *simpel*, hvis der findes en endelig klassedeling $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ af X i målelige mængder og punkter $y_1, \cdots, y_n$ i Y således, at $f(x) = y_j$ for $x \in A_j; j = 1, \cdots, n$. I det vigtige tilfælde, hvor $Y = \overline{\mathbb{R}}$, forlanges yderligere, at y_j'erne er reelle. Mængden af simple ikke-negative funktioner på $(X, \mathcal{A})$ betegnes $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. Funktionen f siges at være *elementær*, hvis f er simpel eller hvis der findes en numerabel klassedeling $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ af X i målelige mængder og punkter $y_1, y_2, \cdots$ i Y således, at $f(x) = y_j$ for $x \in A_j; j \geq 1$. Hvis $Y = \overline{\mathbb{R}}$, forlanges yderligere, at y'erne er reelle.

Bemærk, at disse begreber faktisk ikke afhænger af σ-algebraen på Y og at enhver elementær afbildning er målelig.

ØVELSE 1. Bevis det!

I det vigtige tilfælde, hvor $(Y, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, er det let at se, hvordan de målelige funktioner kan fås på en naturlig måde ud fra de simple funktioner.

Sætning 3.2.1 *Lad X være et Borelrum. Da kan enhver målelig reel eller udvidet reel funktion f defineret på X fås som den punktvise grænse for en følge af simple funktioner. Hvis $f \geq 0$, kan vi finde en ikke-aftagende følge $s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ af simple funktioner, så $s_n \to f$, punktvis. Og hvis f er begrænset, kan vi finde en ikke-aftagende følge af simple funktioner som konvergerer uniformt mod f.*

Bevis. Vi indskrænker os til at behandle tilfældet, hvor f er reel. Antag først, at $f \geq 0$. Definer s_n for $n \geq 1$ ved

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{for alle } x \text{ så } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n};\ k = 0, 1, \cdots, n \cdot 2^n - 1 \\ n & \text{for alle } x \text{ så } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Så er s_n'erne simple, $s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ og for alle $x \in X$ vil $s_n(x) \to f(x)$. Hermed er tilfældet $f \geq 0$ klarlagt.

Er f begrænset, kan vi gerne antage, at $0 \leq f \leq 1$, og ovenstående metode viser så let det ønskede.

I det generelle tilfælde bestemmes simple funktioner $(s_n)_{n \geq 1}$ og $(t_n)_{n \geq 1}$, så $s_n \to f^+$ og $t_n \to f^-$. Så vil $s_n - t_n \to f$ og funktionerne $s_n - t_n$ er åbenbart simple. □

Bemærkning For udvidet reelle funktioner $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ kan beviset føres ved at udnytte, at der findes en pæn bijektion af $\bar{\mathbb{R}}$ på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (se på $x \curvearrowright \text{Arctan}x$). Overvej.

Hvis man studerer mere generelle værdirum end $\mathbb{R}$ kan man i mange tilfælde, trods den manglende ordning, udnytte de simple og elementære afbildninger til at opbygge vilkårlige målelige afbildninger. Den interesserede læser henvises til Opgave 10.

3.3 Nye Borelrum ud fra gamle (del 2)

Ved hjælp af begrebet målelighed for afbildninger kan man indføre en generel metode til at danne Borelstrukturer på en mængde, der afbildes ind i mængder med givne Borelstrukturer.

Definition 3.3.1 Lad X være en mængde, $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ en familie af afbildninger, hvor hver f_i afbilder X ind i X_i. Ved *initial-Borelstrukturen* $\overleftarrow{\sigma}((f_i)_{i\in I})$ på X forstås den groveste Borelstruktur på X, der gør alle afbildningerne f_i målelige.

At definitionen giver mening ses let, thi kravet om at f_i'erne skal være målelige kommer ud på at alle mængder i brolægningen

$$\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i) = \{f_i^{-1}(A) \mid i \in I, A \in \mathcal{B}_i\}$$

skal være målelige. Derfor er

$$\overleftarrow{\sigma}((f_i)_{i\in I}) = \sigma(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)).$$

Eksempel 1. Er $X = (X, \mathcal{B})$ et Borelrum og $X_0 \subseteq X$, kan vi se på initial-Borelstrukturen på X_0 for den naturlige indlejring $\varphi : X_0 \to X$ (givet ved $\varphi(x) = x$; $x \in X_0$). Her er $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \mathrm{tr}_{X_0}\mathcal{B}$, hvorfor den søgte Borelstruktur på X_0 er identisk med den allerede indførte spor-Borelstruktur $\mathrm{tr}_{X_0}\mathcal{B}$. □

Eksempel 2. Er $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ Borelrum, finder vi, at initial Borel-strukturen på $X \times Y$ hørende til projektionsafbildningerne $\pi_X : X \times Y \to X$ og $\pi_Y : X \times Y \to Y$ er identisk med den tidligere indførte produkt-Borelstruktur. Vi har jo

$$\pi_X^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \times Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

og

$$\pi_Y^{-1}(\mathcal{B}) = \{X \times B \mid B \in \mathcal{B}\},$$

så σ-algebraen frembragt af $\pi_X^{-1}(\mathcal{A}) \cup \pi_Y^{-1}(\mathcal{B})$ er den samme som σ-algebraen frembragt af fællesmængder af en mængde i $\pi_X^{-1}(\mathcal{A})$ og en i $\pi_Y^{-1}(\mathcal{B})$, hvilket netop er brolægningen af rektangler med målelige sider.. □

Man udvider uden vanskelighed Eksempel 2 til at gælde initial-Borelstruktur på et produktrum af flere end to faktorrum.

De to tidligere indførte Borelstrukturer vi så på under mottoet "nye ud fra gamle" er altså begge specialtilfælde af den generelle konstruktion i definitionen ovenfor.

Sætning 3.3.1 Gennemstrømmende afbildningssætning for Borelrum. *Lad* $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ *være Borelrum og* $(f_i)_{i\in I}$ *en familie af afbildninger med* $f_i : X \to X_i$*;* $i \in I$*. Lad* $\mathcal{B}$ *være initial-Borelstrukturen* $\overleftarrow{\sigma}((f_i)_{i\in I})$ *på* X*.*

Så er en afbildning $\varphi : Z \to X$*, hvor* $Z = (Z, \mathcal{A})$ *er et Borelrum, målelig, hvis og kun hvis enhver af de sammensatte afbildninger* $f_i \circ \varphi : Z \to X_i$*;* $i \in I$ *er målelige.*

Bevis. "kun hvis" er banal. For at vise "hvis-delen" antages, at alle $f_i \circ \varphi$'erne er målelige. Så vil $(f_i \circ \varphi)^{-1}(\mathcal{B}_i) \subseteq \mathcal{A}$ eller $\varphi^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)) \subseteq \mathcal{A}$. Ser vi derfor på systemet $\mathcal{S}$ af de $S \subseteq X$ for hvilke $\varphi^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ finder vi, at $\mathcal{S}$ er en σ-algebra som indeholder $\bigcup\{f_i^{-1}(\mathcal{B}_i) \mid i \in I\}$. Da denne brolægning frembringer $\mathcal{B}$ følger nu, at $\mathcal{S}$ indeholder $\mathcal{B}$. Derfor er φ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-målelig. $\square$

Korollar 3.3.1 *Lad* $(X_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ *være Borelrum og udstyr produktmængden* $X = \Pi_{i\in I} X_i$ *med produkt-Borelstrukturen (sammenfaldende med initial-Borelstrukturen for projektionsafbildningerne* $\pi_i : X \to X_i$*;* $i \in I$*). For en afbildning* $\varphi : Y \to X$*, hvor* $Y = (Y, \mathcal{A})$ *er et Borelrum, gælder at* φ *er målelig, hvis og kun hvis alle afbildningerne* $\pi_i \circ \varphi : Y \to X_i$*;* $i \in I$ *er målelige.*

Korollar 3.3.2 *Lad* $(X, \mathcal{A})$ *være et Borelrum og antag, at* Y *er separabel og metriserbar. For enhver målelig afbildning* $f : X \to Y$ *gælder da, at grafen for* f *er en målelig delmængde af produktrummet* $X \times Y$*.*

ØVELSE 1. Bevis dette. *Vejledning.* Udnyt, at afbildningen $(x, y) \curvearrowright (f(x), y)$ er målelig og at diagonalen i Y er målelig.

3.4 Borelisomorfier

Isomorfibegrebet indtager en central plads ved studiet af mange matematiske teorier. Når talen er om Borelstruktur, er det spørgsmål, der interesserer os følgende: Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være to Borelrum. Hvad betyder det, at disse rum "ser ens ud" med "Borelbriller"? I (Topsøe, 1998) findes en generel diskussion af dette problem. Måske kan vi ved et enkelt eksempel forklare, hvad tankegangen går ud på.

EKSEMPEL 1. Lad $(X, \mathcal{A}) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[))$ og $(Y, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Naturligvis er disse rum forskellige. I Y finder vi vilkårligt store tal, mens X er begrænset. Læg mærke til at vi for at se forskel på de to Borelrum inddrog eksterne betragtninger, her vedrørende den naturlige ordningsstruktur på X og Y, der intet har med den rene Borelteori at gøre. Hvis vi ikke tillader os dette, men insisterer på at arbejde med "Borelbriller" på, kan vi ikke kende forskel på de to Borelrum. De ser ens ud. Der findes jo en bijektion $\varphi : X \to Y$ så det for alle $A \subseteq X$ gælder, at $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \varphi(A) \in \mathcal{B}$ og så det for alle $B \subseteq Y$ gælder, at $B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Så vi kan frit gå fra X til Y (x erstattes med $\varphi(x)$, $A \subseteq X$ erstattes med $\varphi(A)$) og fra

Y til X (y erstattes med $\varphi^{-1}(y)$ og $B \subseteq Y$ med $\varphi^{-1}(B)$) uden at dette ændrer ved det altafgørende spørgsmål om målelighed. $\square$

ØVELSE 1. Angiv en konkret funktion φ med egenskaber som nævnt i eksemplet. *Vejledning.* Se på en homeomorfi $\varphi : X \to Y$.

Med baggrund i ovenstående diskussion kan vi nu definere:

Definition 3.4.1 En *Borelisomorfi* mellem Borelrummene $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ er en bijektion $\varphi : X \to Y$ således, at

$$\forall A \subseteq X \quad : \quad A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \varphi(A) \in B, \tag{3.2}$$

$$\forall B \subseteq Y \quad : \quad B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}. \tag{3.3}$$

Hvis der findes en Borelisomorfi mellem $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$, kaldes disse rum *Borelisomorfe.*

ØVELSE 2. Vis, at bijektionen $\varphi : X \to Y$ er en Borelisomorfi, hvis blot en af betingelserne (3.2) eller (3.3) er opfyldt.

Vi noterer også, at bijektionen $\varphi : X \to Y$ er en Borelisomorfi, hvis og kun hvis såvel φ som φ^{-1} er målelige afbildninger.

Isomorfibegrebet for Borelrum opfører sig som man skulle vente, idet det definerer en ækvivalensrelation i klassen af alle Borelrum:

Sætning 3.4.1 *Idet $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ og $(Z, \mathcal{C})$ betegner Borelrum og $\approx$ betegnes "Borelisomorf med", gælder:*

(i) $(X, \mathcal{A}) \approx (X, \mathcal{A})$

(ii) $(X, \mathcal{A}) \approx (Y, \mathcal{B}) \Rightarrow (Y, \mathcal{B}) \approx (X, \mathcal{A})$

(iii) $(X, \mathcal{A}) \approx (Y, \mathcal{B}) \wedge (Y, \mathcal{B}) \approx (Z, \mathcal{C}) \Rightarrow (X, \mathcal{A}) \approx (Z, \mathcal{C})$.

Beviset er lige ud ad landevejen og overlades til læseren. Der er mere kød på følgende resultat (som er vigtigt i undersøgelser, der går videre, end det, vi skal komme ind på):

Sætning 3.4.2 (Bernstein's ækvivalenssætning for Borelrum). *Hvis $(X, \mathcal{A})$ er Borelisomorf med et delrum af $(Y, \mathcal{B})$ og $(Y, \mathcal{B})$ er Borelisomorf med et delrum af $(X, \mathcal{A})$, så er $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ Borelisomorfe.*

Bevisidé. Der findes altså en Borelisomorfi $\varphi : X \to Y_0$ med $Y_0 \subseteq Y$ og en Borelisomorfi $\psi : Y \to X_0$ med $X_0 \subseteq X$. Vi ved så, at $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \varphi(A) \in \mathrm{tr}_{Y_0}(\mathcal{B})$ og $B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \psi(B) \in \mathrm{tr}_{X_0}(\mathcal{A})$. Vi "mixer" nu afbildningerne φ og ψ præcis som vi er vant til fra beviset for den sædvanlige (mængdeteoretiske) Bernstein's ækvivalenssætning (se f.eks. Berg, 1997 eller Topsøe, 1998). Ved inspektion ses, at den "mixede" afbildning bliver en Borelisomorfi mellem $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$. Detaljer overlades til læseren. $\square$

Vi vil nu udnytte en teknik af den polske matematiker Marczewski og vise, at Borelstrukturen $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ og dens delstrukturer rummer alle Borelstrukturer, der blot ikke er "alt for store" og samtidig kan skelne punkter (dvs. er separerende). Præcist:

Sætning 3.4.3 (1'te isomorfisætning for Borelstrukturer). *Enhver tælleligt frembragt og separerende Borelstruktur er isomorf med en sporstruktur i* $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *dvs. med* $(\Delta, \mathrm{tr}_\Delta(\mathcal{B}(\mathbb{R})))$ *for en delmængde* $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

Bevis. Lad $(X, \mathcal{A})$ være tælleligt frembragt og separerende. Vælg $A_n \in \mathcal{A}; n \geq 1$, så $\{A_n | n \geq 1\}$ er et frembringersystem for $\mathcal{A}$. Så er $\{A_n | n \geq 1\}$ også separerende (se evt. Kapitel II, Opgave 27). Definér nu $f : X \to \mathbb{R}$ ved $f = \sum_1^\infty 10^{-n} \cdot 1_{A_n}$. Ifølge Sætning 3.1.4 er f målelig.

Lad nu E_n betegne delmængden af $\mathbb{R}$ (faktisk af $[0, 1]$) bestående af de $t \in [0, 1]$, der har en decimalfremstilling, hvor n'te decimale ciffer er 1. Så vil $E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, E_n er faktisk lukket (se Figur 10).

Figur 10

Da $A_n = f^{-1}(E_n)$ (overvej!), vil $A_n \in f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{A}$. Dette gælder alle $n \geq 1$ og vi finder, at

$$\sigma(\{A_n | n \geq 1\}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{A}.$$

Da σ-algebraen på venstresiden er $\mathcal{A}$, må

$$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{A}. \tag{3.4}$$

Vi bemærker nu, at da $\{A_n | n \geq 1\}$ er separerende, er f injektiv. Sæt $\Delta = f(X)$. Så er $f : X \to \Delta$ en bijektion. Af (3.4) ses så, at når f betragtes som en afbildning af X på Δ, er f en Borelisomorfi (overvej!). $\square$

Bemærkninger Resultatet er præcist i den forstand, at enhver spor-Borelstruktur af $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ er tælleligt frembragt og separerende. Dette er temmelig banalt (overvej!). Det overraskende er, at det omvendte gælder. F.eks. følger det, at hvis X er et separabelt metriserbart rum, så er $X = (X, \mathcal{B}(X))$ set med Borelbriller noget, der ligesågodt kunne vedrøre en delmængde af $\mathbb{R}$.

En reaktion på isomorfisætningen kunne være, at med den forstår vi fuldstændigt strukturen af de tælleligt frembragte separerende Borelrum. Det er jo bare delmængderne af $\mathbb{R}$ udstyret med deres naturlige Borelstruktur (identisk med spor-Borelstrukturen nedarvet fra $\mathbb{R}$). Denne holdning er imidlertid ikke rimelig. Der udestår mange problemer, før man kan sige, man forstår strukturen af klassen af tælleligt frembragte separerende Borelrum til bunds. Sagen er den, at en "vilkårlig delmængde af $\mathbb{R}$" er noget uhåndgribeligt noget, og faktisk støder man hurtigt på problemer, der er uafgørlige inden for de sædvanlige aksiomer (ZFC) for mængdelæren.

Det er således uafklaret, hvor mange forskellige (ikke-isomorfe) Boreltyper delmængderne af $\mathbb{R}$ definerer. Her er det kun interessant at se på over-tællelige delmængder af $\mathbb{R}$. Et af de kønneste resultater er vist af den polske matematiker Kuratowski. Han viste, at er Δ og Δ' to over-tællelige Borel-målelige delmængder af $\mathbb{R}$, så er Borelrummene $(\Delta, \mathcal{B}(\Delta))$ og $(\Delta', \mathcal{B}(\Delta'))$ isomorfe. F.eks. har Cantormængden og $\mathbb{R}$ "samme" Borelstruktur, de er isomorfe.

3.5 Topologisk definerede funktioner

Som fremhævet før, udnytter målteorien begreber og resultater fra den generelle topologi. Det er derfor ikke forbavsende, at topologisk definerede afbildninger optræder i målteorien. Formålet med denne § er at indføre notation for de vigtigste typer af afbildninger og pointere visse resultater, vi siden vil få brug for.

Er X og Y topologiske rum (som sædvanlig kan læseren antage, det drejer sig om metriserbare rum), betegner $C(X, Y)$ mængden af kontinuerte funktioner af X ind i Y, altså mængden af $f : X \to Y$ for hvilke $f^{-1}(G) \in \mathcal{G}(X)$ for alle $G \in \mathcal{G}(Y)$, kort skrevet

$$f^{-1}(\mathcal{G}(Y)) \subseteq \mathcal{G}(X).$$

Vi husker også, at for metriserbare rum, vil $f \in C(X, Y)$ hvis og kun hvis f bevarer konvergens, dvs. af $x_n \to x$ (i X) følger $f(x_n) \to f(x)$ (i Y). Et tilsvarende resultat gælder i generelle topologiske rum, se Appendix 1.10 og (Berg, 1997). Idet vi holder os til metriserbare rum, kan vi udtrykke denne vigtige sammenhæng mellem kontinuitet og konvergens i følgende ækvivalens:

$$f \in C(X, Y) \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \geq 1} \subseteq X \, \forall x \in X : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x). \tag{3.5}$$

I målteorien interesserer vi os især for reelle funktioner. Med $C(X)$ betegner vi mængden – eller, med et andet ord, *funktionsrummet* – af kontinuerte reelle funktioner defineret på X. Vi sætter altså

$$C(X) = C(X, \mathbb{R}).$$

Med $C_b(X)$ betegnes funktionsrummet af begrænsede kontinuerte reelle funktioner. Idet vi med $\|f\|_\infty$ betegner supremumnormen af en reel funktion defineret på X:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

er

$$C_b(X) = \{f \in C(X) \mid \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Supremumnormen kan udnyttes til at udtrykke uniform konvergens. Der gælder jo, at funktionsfølgen $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergerer uniformt mod f netop når $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Vil vi udtrykke, at $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergerer uniformt mod f på delmængden $K \subseteq X$, kan vi gøre det med kravet $\|f_n|K - f|K\|_\infty \to 0$. Her betegner "$\cdots|K$" restriktion til mængden K. Vi minder også om at uniform konvergens er et stærkere krav end punktvis konvergens:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Rightarrow \forall x \in X : f_n(x) \to f(x).$$

For den vigtige klasse af lokalkompakte Hausdorffrum – denne klasse omfatter bl.a. de euklidiske rum (se Berg, 1997) – indfører vi yderligere to klasser af kontinuerte funktioner, dels klassen $C_0(X)$ af *kontinuerte funktioner, der går mod* 0 *i uendelig,* dels klassen $C_c(X)$ af *kontinuerte funktioner med kompakt støtte.* Præcist:

$$\begin{aligned} C_0(X) &= \left\{f \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0\, \exists K \in \mathcal{K}(X)\, \forall x \in \complement K : |f(x)| \leq \varepsilon\right\}, \\ C_c(X) &= \{f \in C(X) \mid \mathrm{supp(f)} \in \mathcal{K}(\mathrm{X})\}, \end{aligned}$$

hvor supp(f) betegner *støtten* af f:

$$\begin{aligned} \mathrm{supp(f)} &= \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \\ &= \{x \in X \mid \forall N(x) \text{ omegn af } x\, \exists y \in N(x) : f(y) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Sådan set kan man definere $C_0(X)$ og $C_c(X)$ for generelle topologiske rum, men dette er uinteressant, da $C_0(X)$ og $C_c(X)$ typisk er trivielle (indeholder kun nulfunktionen) med mindre X er lokalkompakt.

Med et "+" tilkendegives, at vi ser på ikke-negative funktioner. Således betegner $C^+(X)$ mængden af ikke-negative kontinuerte funktioner på X og $C_b^+(X)$ den tilsvarende mængde af begrænsede funktioner.

Funktionsrummene $C_c(X)$, $C_0(X)$, $C_b(X)$ og $C(X)$ er alle vektorrum og disse rum er alle lukkede over for "gitteroperationerne" $(\vee f, \wedge f)$, dvs. over for endelig (f for "finite") supremum (maximum) og endelig infimum (minimum).

Funktionsrummene af halv-kontinuerte funktioner, vi nu skal se på, er typisk *ikke* vektorrum (idet subtraktion ikke altid er mulig inden for disse rum). Til gengæld har de udvidede stabilitetsegenskaber over for gitteroperationerne.

Med USC(X) betegnes mængden af opad halv-kontinuerte reelle funktioner på X. Vi bruger forkortelsen "u.s.c." for "opad halv-kontinuert" (eng. "upper semi continuous"). Pr. definition gælder, at

$$f \in \mathrm{USC(X)} \Leftrightarrow \forall \mathrm{a} \in \mathbb{R} : \{\mathrm{f} < \mathrm{a}\} \in \mathcal{G}(\mathrm{X}).$$

Med LSC(X) betegnes mængden af nedad halv-kontinuerte funktioner på X (forkortet "l.s.c." for "lower semi continuous"), dvs. mængden af $f : X \to \mathbb{R}$, så $\{f > a\}$ er åben for alle $a \in \mathbb{R}$. Åbenbart gælder

$$f \in \mathrm{LSC(X)} \Leftrightarrow -\mathrm{f} \in \mathrm{USC(X)}$$

og

$$C(X) = \mathrm{USC(X)} \cap \mathrm{LSC(X)}.$$

Hvis X er metriserbar, gælder ækvivalenserne

$$f \in \mathrm{USC(X)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n) \subseteq X \, \forall x \in X : x_n \to x \Rightarrow f(x) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \tag{3.6}$$

$$f \in \mathrm{LSC(X)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_n) \subseteq X \, \forall x \in X : x_n \to x \Rightarrow f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{3.7}$$

Disse karakterisationer af halv-kontinuerte funktioner udvides til at gælde vilkårlige topologiske rum; så skal man i stedet for følger på X se på generaliserede følger (net).

$*$ **Bemærkning** Gyldigheden af (3.6) og (3.7) eftervises forholdsvis let direkte. Vi vil dog ikke gøre dette, men i stedet pege på et smart bevis, der udnytter et vist kendskab til generel topologi. Det centrale er iagttagelsen, at $f : X \to \mathbb{R}$ er u.s.c., hvis og kun hvis f er kontinuert når man, vel at mærke, skifter den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}$ ud med (ikke-Hausdorff) topologien, der som åbne mængder har $\emptyset, \mathbb{R}$ samt alle intervaller af formen $]-\infty, a[$; $a \in \mathbb{R}$. I denne topologi vil $a_n \to a$, hvis og kun hvis $a \geq \limsup a_n$. Ækvivalensen (3.6) følger så af (3.5).

Til at lette den intuitive forståelse af kravet om halv-kontinuitet (opad eller nedad) har vi på Figur 11 i skitseform (og svarende til tilfældet $X = \mathbb{R}$) antydet nogle eksempler på halvkontinuerte funktioner

Figur 11

Til yderligere underbygning af intuitionen tjener følgende vigtige ækvivalenser, gældende indikatorfunktioner for delmængder af X:

$$1_A \in \mathrm{USC(X)} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{F}(X), \tag{3.8}$$

$$1_A \in \mathrm{LSC(X)} \quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathcal{G}(X). \tag{3.9}$$

Man kan med andre ord betragte u.s.c.-funktioner som generalisationer af lukkede mængder og l.s.c.-funktioner som generalisationer af åbne mængder. Hvis man derfor f.eks. har bevist en interessant egenskab for lukkede delmængder af et topologisk rum, kan man tit have glæde af at stille sig spørgsmålet, om egenskaben kan udvides til at gælde vilkårlige opad halv-kontinuerte funktioner. Lad os staks se et eksempel på denne betragtningsmåde. Som bekendt er $\mathcal{F}(X)$ en $(\cup f, \cap a)$-lukket brolægning. Hertil svarer følgende egenskaber for USC(X): Hvis $(f_i)_{i\in I}$ er en familie af u.s.c. funktioner og $\inf f_i$ er en veldefineret reel funktion, så er $\inf f_i$ u.s.c. Og hvis I er endelig er $\sup f_i = \max f_i$ u.s.c. Disse egenskaber følger af identiteterne

$$\begin{aligned}
\{\inf_{i\in I} f_i < a\} &= \bigcup_{i\in I}\{f_i < a\}, \\
\{\max_{i\in I} f_i < a\} &= \bigcap_{i\in I}\{f_i < a\} \qquad (I \text{ endelig}).
\end{aligned}$$

Tilsvarende egenskaber gælder for funktionsrummet LSC(X): dette rum er lukket overfor supremumsdannelse (forudsat vi bliver inden for $\mathbb{R}$) og (endelig) minimumsdannelse.

Af andre vigtige egenskaber for rummene USC(X) og LSC(X) bemærkes, at disse rum er "positive kegler", dvs. hvis f er i ét af disse rum og $\alpha \geq 0$, da ligger også αf i rummet og hvis f og g begge ligger i et af disse rum, da også $f + g$. Det sidste (for USC(X)) følger af identiteten

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{f < q\} \cap \{g < a - q\}$$

(hvor vi sådan set lige så godt kunne have set på en foreningsmængde over alle $q \in \mathbb{R}$).

Det er velkendt, at hvis $f_n \to f$, uniformt over X og alle f_n'erne er kontinuerte, så er også f kontinuert. En tilsvarende egenskab gælder USC(X) og LSC(X), se Opgave 14.

Af og til studerer man u.s.c. eller l.s.c. funktioner, der kan antage værdierne $\pm\infty$. Definition og egenskaber er som for de reelle halv-kontinuerte funktioner og kan udledes ved at identificere $\bar{\mathbb{R}}$ med f.eks. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (via Arctan-afbildningen). Der er dog et par forskelle. Først bemærkes, at for udvidet reelle halv-kontinuerte funktioner har man den fordel, at "sup" og "inf" altid giver mening for en familie $(f_i)_{i\in I}$ af funktioner og så opnår vi, at $\sup f_i$ er l.s.c., hvis alle f_i'erne er l.s.c. og $\inf f_i$ er u.s.c., hvis alle f_i'erne er u.s.c. (uden at være nødet til at forudsætte, at $\sup f_i$, hhv. $\inf f_i$ eksisterer). Men for udvidet reelle funktioner må man være opmærksom på at en sum ikke nødvendigvis er veldefineret. Se i denne forbindelse Opgave 15.

For halv-kontinuerte funktioner gælder to vigtige resultater, hvor kompakthed spiller ind. Det første resultat er en nyttig generalisation af den velkendte egenskab, at en kontinuert reel funktion på en kompakt mængde er begrænset og har såvel en største- som en mindsteværdi.

Sætning 3.5.1 *Lad X være et metriserbart topologisk rum og K en kompakt ikke-tom delmængde af X.*

(i) *Hvis $f \in \mathrm{USC(X)}$, er f opadtil begrænset på K og f har en størsteværdi på K.*

(ii) *Hvis $f \in \mathrm{LSC(X)}$, er f nedadtil begrænset på K og f har en mindsteværdi på K.*

Bevis. (ii) følger af (i). Lad os vise (i). Antag derfor, at $f \in \mathrm{USC(X)}$. Da mængderne $K \cap \{f \geq n\}$; $n \geq 1$ aftager og har tom fællesmængde (husk, at f er en reel funktion, så f antager ikke værdien $+\infty$), og da yderligere alle mængderne $K \cap \{f \geq n\}$; $n \geq 1$ er kompakte, findes et $n \geq 1$ så $K \cap \{f \geq n\} = \emptyset$. Dermed er f opadtil begrænset på K (this $f(x) < n$ for $x \in K$).

Lad $s = \sup\{f(x) \mid x \in K\}$. Så er $s < \infty$. Da $K \cap \{f \geq s - 1/n\}$ er en dalende følge af kompakte ikke-tomme mængder, er disse mængders fællesmængde ikke-tom, dvs. $K \cap \{f \geq s\} = K \cap \{f = s\}$ er ikke-tom. Der findes altså $x \in K$ så $f(x) = s$. □

Før formuleringen af næste sætning indføres et nyt begreb for funktioner. Lad $(f_i)_{i\in I}$ være en familie af reelle funktioner på X. Familien siges at være *nedad filtrerende* såfremt der for enhver endelig delmængde I_0 af I findes et $i_0 \in I$ så $f_{i_0} \leq \min\{f_i \mid i \in I_0\}$. Vi skriver $f_i \downarrow f$ såfremt $(f_i)_{i\in I}$ er nedad filtrerende og $\inf f_i = f$. Tilsvarende defineres, at en familie er *opad filtrerende* (enhver endelig delfamilie har en majorant i familien) og tilsvarende fastlægges notationen $f_i \uparrow f$. Vi har $f_i \uparrow f \Leftrightarrow -f_i \downarrow -f$.

Sætning 3.5.2 (Dini's lemma) *Lad X være metriserbar, lad $(f_i)_{i\in I}$ være en familie af funktioner i $\mathrm{USC}^+(\mathrm{X})$ og antag, at $f_i \downarrow 0$. Da vil (f_i) konvergere mod 0-funktionen, ligeligt på kompakte delmængder af X, dvs. for alle $K \in \mathcal{K}(X)$ og alle $\varepsilon > 0$ findes $i_0 \in I$ så $|f_{i_0}(x)| \leq \varepsilon$ for alle $x \in K$.*

Bevis. Med betegnelser og forudsætninger som angivet, bemærker vi, at for $K \in \mathcal{K}(X)$ og $\varepsilon > 0$, vil

$$K \cap \{f_i \geq \varepsilon\} \downarrow \emptyset,$$

og da mængderne her er kompakte, findes et $i_0 \in I$ så $K \cap \{f_i \geq \varepsilon\} = \emptyset$. Heraf følger resultatet. □

Bemærkninger. Begge sætninger ovenfor gælder i vilkårlige Hausdorffrum (med samme bevis). I (Berg, 1997) finder man også et bevis for første sætning (beviset er dér drejet lidt anderledes).

Lad os i skemaform opregne vigtige forhold for de funktionsrum, vi har indført.

betegnelse	funktionerne kaldes	definition	stabilitetsegenskaber
$C(X)$	kontinuerte	$f^{-1}(\mathcal{G}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{G}(X)$	$(1, \vee f, \wedge f)$, vektorrum (v.r.)
$C_b(X)$	kont.begrænsede	$f \in C(X) \wedge \\|f\\|_\infty < \infty$	$(1, \vee f, \wedge f)$, v.r.
$C_0(X)$	kont.,$\rightarrow 0$ i uendelig	$f \in C(X) \wedge \forall \varepsilon \exists K : \\|f \| \complement K\\|_\infty < \varepsilon$ for X lok.kp.Hausdorff	$(\vee f, \wedge f,$ Stone$)$, v.r.
$C_c(X)$	kont., kp.støtte	$f \in C(X) \wedge$ supp(f) $\in \mathcal{K}$(X) for X lok.kp.Hausdorff	$(\vee f, \wedge f,$ Stone$)$, v.r.
$C^+(X)$	kont., ≥ 0	$f \in C(X) \wedge f \geq 0$	$(1, \vee f, \wedge f, \setminus)$, positiv kegle
$C_b^+(X)$	kont., begr., ≥ 0	$f \in C_b(X) \wedge f \geq 0$	$(1, \vee f, \wedge f, \setminus)$, positiv kegle
$C_0^+(X)$		$f \in C_0(X) \wedge f \geq 0$	$(\vee f, \wedge f, \setminus,$ Stone$)$, pos.kegle
$C_c^+(X)$		$f \in C_c(X) \wedge f \geq 0$	$(\vee f, \wedge f, \setminus,$ Stone$)$, pos.kegle
USC(X)	opad halv-kont.	$\forall a : \{f < a\} \in \mathcal{G}(X)$	$(1, \vee f, \wedge a)$, pos.kegle
LSC(X)	nedad halv-kont.	$\forall a : \{f > a\} \in \mathcal{G}(X)$	$(1, \vee a, \wedge f)$, pos.kegle
USC$^+$(X)	u.s.c., ≥ 0	$f \in$ USC(X) $\wedge$ f ≥ 0	$(1, \vee f, \wedge a)$, pos.kegle
LSC$^+$(X)	l.s.c., ≥ 0	$f \in$ LSC(X) $\wedge$ f ≥ 0	$(1, \vee a, \wedge f)$, pos.kegle

Stone's betingelse, der optræder for C_0- og C_c-rummene (der typisk ikke indeholder konstantfunktionen 1), er betingelsen, at hvis f tilhører et af disse rum, vil også $f \wedge 1 = \min(f, 1)$ tilhøre rummet. For C^+-rummene gælder, at de er lukkede under den operation, der betegnes "\". Denne operation er en binær operation defineret for ikke-negative funktioner; den er givet ved

$$f \setminus g = f - f \wedge g. \tag{3.10}$$

Når vi påpeger, at USC- og LSC-rummene er lukkede overfor hhv. $\wedge a$- og $\vee a$-operationerne (a for vilkårlig, "arbitrary"), refererer dette til situationer, hvor der er givet en vilkårlig familie $(f_i)_{i \in I}$ af funktioner og hhv. $\inf f_i$ (svarende til $\wedge a$) og $\sup f_i$ (svarende til $\vee a$) er veldefinerede reelle funktioner.

Bemærk, at begrebet "positiv kegle" ikke indebærer et krav om at funktionerne er ≥ 0, men derimod er kravet, at en vilkårlig linearkombination $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ med positive koefficienter af funktioner i det pågældende funktionsrum igen tilhører det betragtede funktionsrum.

Opgaver til Kapitel III

Opgave 1. Idet $\mathbb{C}$, de komplekse tal, udstyres med samme Borelstruktur som $\mathbb{R}^2$ (ved den sædvanlige identifikation af $z \in \mathbb{C}$ med (x, y), hvor $x = \operatorname{Re} z$ og $y = \operatorname{Im} z$), skal man vise, at en kompleks funktion f defineret på et Borelrum X er målelig, hvis og kun hvis $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ er målelige.

Vis resultater for regning med komplekse målelige funktioner, der svarer til de resultater, vi har udledt for regning med reelle målelige funktioner (Sætning 3.1.4).

Opgave 2. Vis, at enhver ikke-aftagende funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er målelig.

Opgave 3. Lad f og g være reelle målelige funktioner defineret på et Borelrum X. Vis, at $\{f < g\} = \{x \in X | f(x) < g(x)\}$ er målelig.

Opgave 4. Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum, så $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(X)$. Vis, at der findes en reel funktion defineret på X, som ikke er målelig.

Opgave 5. Lad X og Y være Borelrum. For $f : X \to \mathbb{R}$ og $g : Y \to \mathbb{R}$ (her kunne $\mathbb{R}$ erstattes af $\bar{\mathbb{R}}$ eller $\mathbb{C}$) defineres *tensorproduktet* $f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{R}$ ved $(f \otimes g)(x, y) = f(x) \cdot g(y)$. Vis, at hvis f og g er målelige, så er $f \otimes g$ målelig (og præcisér, hvilke Borelstrukturer der tænkes på i dette udsagn).

Opgave 6. (definition via en "tuborg"). Lad $X = (X, \mathcal{A})$ og $Y = (Y, \mathcal{B})$ være Borelrum, lad $(A_i)_{i \in I}$ være en tællelig klassedeling af X i målelige mængder, lad $(A_i^*)_{i \in I}$ være en familie af mængder så $A_i \subseteq A_i^*$; $i \in I$ og antag, at $(h_i)_{i \in I}$ er en familie af afbildninger så $h_i : A_i^* \to Y$ er målelig (naturligvis m.h.t. σ-algebraerne $\mathrm{tr}_{\mathrm{A}_i^*}(\mathcal{A})$ og $\mathcal{B}$) for hvert $i \in I$.

Bevis, at så er $f : X \to Y$ givet ved $f(x) = h_i(x)$ for $x \in A_i$ målelig.

Bevis, at funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \ x \in]-\infty, 0] \\ \cos x & ; \ x \in]0, \infty[\cap \mathbb{Q} \\ e^x & ; \ x \in]0, \infty[\setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

er målelig.

Opgave 7. Undersøg, om der for en funktion $f : X \to \mathbb{R}$, hvor X er et Borelrum, gælder, at f er målelig, hvis og kun hvis $|f|$ er det.

Opgave 8. Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være Borelrum og antag, at $\mathcal{B}$ er separerende. Vis, at en afbildning $f : X \to Y$ er simpel, hhv. elementær, hvis og kun hvis f er målelig og har endelig, hhv. tællelig, værdimængde.

Opgave 9. Vis, at enhver reel målelig funktion er uniform grænse for en ikke-aftagende følge af elementære funktioner.

$*$ **Opgave 10.** Lad X være et Borelrum og $Y = (Y, d)$ et separabelt metrisk rum. Vis, at enhver målelig afbildning $f : X \to Y$ er den punktvise grænse for en følge af simple afbildninger og den uniforme grænse for en følge af elementære afbildninger. Hvis Y er prækompakt (totalbegrænset), er f den uniforme grænse for en følge af simple afbildninger.

Vejledning. Lad $\{y_1, y_2, \cdots\}$ være tæt i Y. Bemærk, at det er nok at vise påstandene for den identiske afbildning $\mathrm{id_Y} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$. For $n \geq 1$, $y \in Y$, lad $j_n(y)$ være det første indeks ν, så

$$d(y, y_\nu) = \min_{1 \leq k \leq n} d(y, y_k).$$

Vis, at j_n'erne er målelige. For alle $y \in Y$ vil der findes en delfølge af (y_n) som konvergerer mod y. Så vil $d(y, j_n(y)) \to 0$ og $j_n(y) \to y$ følger. Defineres j_n'erne i stedet ved at sætte $j_n(y) = y_\nu$ med ν det første index så $d(y, y_\nu) \leq 1/n$, kan resultatet vedrørende uniform konvergens udledes.

$*$ **Opgave 11.** Lad X være udstyret med initial-Borelstrukturen $\mathcal{B} = \overleftarrow{\sigma}((f_i))$ hørende til en familie af afbildninger $f_i : X \to X_i$, hvor $X_i = (X_i, \mathcal{B}_i)$ er Borelrum. Vis, at $\mathcal{B} = \overleftarrow{\sigma}(F)$, hvor F er diagonalafbildningen hørende til $(f_i)_{i \in I}$.

Opgave 12. Lad $f_i : X_i \to X$; $i \in I$ være afbildninger, hvor $X_i = (X_i, \mathcal{B}_i)$ er Borelrum; $i \in I$. Vis, at der findes en fineste Borelstruktur $\mathcal{B}$ på X, så alle f_i'erne er målelige. **Bemærkning.** $\mathcal{B}$ kaldes *final-Borelstrukturen* hørende til $(f_i)_{i \in I}$ og betegnes $\vec{\sigma}((f_i)_{i \in I})$.

$*$ **Opgave 13.** Funktioner af formen $\sum_1^\infty \alpha_n 1_{B_n}(x)$ med målelige B_n'er (men *uden* et krav om at B_n'erne er parvis disjunkte) kan være meget generelle. Vis, at hvis $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ er en følge af positive tal, så $\alpha_n \to 0$ og $\sum_1^\infty \alpha_n = \infty$ og $(X, \mathcal{B})$ er et Borelrum, så kan *enhver* målelig ikke-negativ funktion f defineret på X skrives på formen $\sum_1^\infty \alpha_n 1_{B_n}$ med målelige mængder B_n.

Vejledning. Antag $\alpha_n \downarrow 0$. Definér $N_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$ så $N_{j+1}(t)$ er det første n så $n > N_j(t)$ og $\sum_1^j \alpha_{N_\nu(t)} + \alpha_n < t$. Vis, at $\sum_1^\infty \alpha_{N_j(t)} = t$. Sæt

$$B_n = f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j^{-1}(n)\right).$$

Opgave 14. Lad f_n; $n \geq 1$ og f være reelle funktioner defineret på det topologiske rum X (antaget metriserbart). Vis, at såfremt alle f_n'erne er u.s.c. og såfremt f_n konvergerer uniformt mod f, så er f u.s.c. *Vejledning.* Man kan f.eks. se på en konvergent følge $x_\nu \to x$ og udnytte omskrivningen

$$f(x) - f(x_\nu) = (f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_\nu)) + (f_{n_0}(x_\nu) - f(x_\nu))$$

til at eftervise (3.6). **Bemærkning.** Dette bevis minder meget om det bevis, der normalt gives for det velkendte resultat: $(f_n) \subseteq C(X), f_n \to f$, uniformt $\Rightarrow f \in C(X)$. Bemærk iøvrigt, at dette resultat følger af det viste i denne opgave (nemlig hvordan ?).

Opgave 15. I denne opgave ser vi på udvidet reelle funktioner defineret på et topologisk rum X. Vi kan så ikke uden videre tale om sum (og differens) af funktioner p. gr. af problemer med $\infty - \infty$. For $s, t \in \bar{\mathbb{R}}$ defineres $s \underset{\cdot}{+} t$ og $s \dot{+} t$ (hhv. *nedre* og *øvre* konvention) ved

$$s \underset{\cdot}{+} t = \begin{cases} s+t; & s \neq -\infty \wedge t \neq -\infty \\ -\infty; & s = -\infty \vee t = -\infty \end{cases} ; \qquad s \dot{+} t = \begin{cases} s+t; & s \neq \infty \wedge t \neq \infty \\ \infty; & s = \infty \vee t = \infty \end{cases} .$$

Vis, at hvis f og g begge er l.s.c., så også $f \underset{\cdot}{+} g$, og hvis f og g begge er u.s.c., så også $f \dot{+} g$.