Kapitel 4

Mål, eksistens og basale egenskaber

4.1 En af målteoriens søjler

I denne og næste § vil vi indfri forventningerne fra Kapitel 1 og konstruere et længdemål, Lebesguemålet, på brolægningen af alle Borelmængder i $\mathbb{R}$. Vi vil dog "snyde" groft, idet vi vil tage udgangspunkt i en central abstrakt sætning, hvis bevis er kompliceret, hvorfor det udskydes til slutningen af kapitlet.

For, på bekvem vis, at kunne formulere den abstrakte sætning, vi vil lægge til grund, er det hensigtsmæssigt at indføre nogle definitioner.

Definition 4.1.1 En *mængdefunktion* $(X, \mathcal{E}, \varphi)$ er en mængde X, en brolægning $\mathcal{E}$ på X og en funktion $\varphi : \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}}$. Med mindre andet fremhæves, vil vi desuden antage, at $\emptyset \in \mathcal{E}$ og $\varphi(\emptyset) = 0$.

Ofte vil X og $\mathcal{E}$ være underforstået, og vi taler så blot om "mængdefunktionen φ", og vi siger, at φ er *defineret på* $\mathcal{E}$. Hvis $\varphi : \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}}_+ \setminus \{\infty\}$, er φ *reel, ikke-negativ*. Af andre naturlige begreber, skal vi her nævne, at φ er *monoton*, hvis det om to mængder E_1 og E_2 i $\mathcal{E}$ med $E_1 \subseteq E_2$ gælder, at $\varphi(E_1) \leq \varphi(E_2)$. Og så minder vi om, at vi allerede i Kapitel 2 (Definition 2.1.2) indførte det for os centrale begreb, et *mål.* Det er en ikke-negativ mængdefunktion defineret på en σ-algebra som er numerabelt additiv og antager værdien 0 i $\emptyset$. Et hovedproblem er at vise sætninger, der som udgangspunkt har en mængdefunktion $(X, \mathcal{E}, \varphi)$ og som konkluderer, at φ kan *udvides* til et mål, dvs. der findes et mål $(X, \mathcal{B}, \mu)$ så $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$ og så $\mu = \varphi$ på $\mathcal{E}$ $(\forall E \in \mathcal{E} : \mu(E) = \varphi(E))$.

Definition 4.1.2 Lad $(X, \mathcal{E}, \varphi)$ være en mængdefunktion. Ved det *inducerede indre indhold* (eller *variationen* af φ), der betegnes φ_*, forstås mængdefunktionen defineret på hele potensmængden $\mathcal{P}(X)$ ved

$$\varphi_*(A) = \sup \left\{ \sum_{i \in I} |\varphi(E_i)| \mid \sum_{i \in I} E_i \subseteq A \right\}, \tag{4.1}$$

gyldig for alle $A \subseteq X$; her skal supremum tages over alle disjunkte familier $(E_i)_{i\in I}$ af mængder i $\mathcal{E}$, som tillige er delmængder af A.

Til klargøring af definitionen (4.1) tjener følgende bemærkninger: Husk vedtægten fra Appendix 1.3 ifølge hvilken notationen $\sum E_i$ automatisk indebærer, at den familie $(E_i)_{i\in I}$, vi kigger på, består af parvis disjunkte mængder. Bemærk også, at da $\varphi(\emptyset) = 0$, vil $\varphi_* \geq 0$. Vi noterer også, at vi i (4.1) kan nøjes med at se på endelige familier $(E_i)_{i\in I}$ (se evt. Appendix 1.11).

For det meste vil vi i disse noter arbejde med ikke-negative mængdefunktioner (se dog Kapitel VII). For disse kan vi naturligvis udelade numerisk-tegnene i (4.1).

Øvelse 1. Antag, at φ er ikke-negativ. Vis, at $\varphi_*(A) = 17$, hvis og kun hvis følgende to betingelser er opfyldt:

(i) $n \in \mathbb{N} \wedge E_1, E_2, \cdots, E_n$ parvis disjunkte $\wedge E_\nu \in \mathcal{E}; \nu \leq n \wedge E_\nu \subseteq A; \nu \leq n$ $\Rightarrow \varphi(E_1) + \varphi(E_2) + \cdots + \varphi(E_n) \leq 17$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists$ parvis disjunkte $\mathcal{E}$-mængder $E_1, \cdots, E_n$ indeholdt i $A : \varphi(E_1)+\varphi(E_2)+ \cdots + \varphi(E_n) > 17 - \varepsilon$.

Øvelse 2. Lad $X = \mathbb{R}^2$, lad $\mathcal{E}$ være brolægningen af samtlige cirkelskiver (f.eks. åbne) med diameter 1 og lad φ være mængdefunktionen på $\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$ givet ved $\varphi(\emptyset) = 0$ og $\varphi(E) = 1$ for $E \in \mathcal{E}$. Vis, at φ_* er *pakketallet* hørende til $\mathcal{E}$, dvs. $\varphi_*(A)$ angiver det maksimale antal disjunkte cirkelskiver med diameter 1, vi kan anbringe "inden i" A.

Definition 4.1.3 Lad $(X, \mathcal{E}, \varphi)$ være en monoton, ikke-negativ mængdefunktion. Vi siger, at brolægningen $\mathcal{K}$ på X er en *indre approksimerende brolægning* for φ, eller blot en *approksimerende brolægning* for φ, såfremt der for alle $E \in \mathcal{E}$ og alle $t < \varphi(E)$ findes $K \in \mathcal{K}$ og $F \in \mathcal{E}$ således, at $F \subseteq K \subseteq E$ og $\varphi(F) \geq t$.

Definitionen kan kort udtrykkes i kravet

$$\forall E \in \mathcal{E} : \varphi(E) = \sup\{\varphi(F) \mid \exists K \in \mathcal{K} : F \subseteq K \subseteq E\}. \tag{4.2}$$

Bemærk, at hvis $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$, så kommer dette ud på at

$$\varphi(E) = \sup\{\varphi(K) \mid K \in \mathcal{K} \wedge K \subseteq E\} \tag{4.3}$$

for alle $E \in \mathcal{E}$.

Definition 4.1.4 En ikke-negativ reel mængdefunktion $\lambda = (X, \mathcal{A}, \lambda)$ kaldes *stram,* såfremt $\mathcal{A}$ indeholder $\emptyset$ og er lukket over for endelig fællesmængdedannelse og såfremt $\lambda(\emptyset) = 0$ og det for alle $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{A}$ med $A \subseteq B$ gælder, at

$$\lambda_*(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A) \tag{4.4}$$

Idet det sådan set følger af (4.1) og (4.4), at $\lambda(\emptyset) = 0$ og at λ er ikke-negativ, kunne disse krav være udeladt fra definitionen. Bemærk, at en stram mængdefunktion pr. definition er endelig – den kan ikke antage værdien ∞.

Endelig er vi i stand til at formulere det resultat, vi har valgt som udgangspunkt for konstruktion af Lebesguemålet og en del andre ikke-trivielle mål. Sætningen er en "søjle". Der er andre "søjler", dvs. centrale resultater om konstruktion af mål. Uden disse søjler ville målteorien være spekulativ, tom.

Sætning 4.1.1 (Konstruktion af mål, første søjle) *En stram mængdefunktion $\lambda = (X, \mathcal{A}, \lambda)$, der har en semikompakt approksimerende brolægning, kan udvides til et mål defineret på σ-algebraen $\sigma(\mathcal{A})$ udspændt af $\mathcal{A}$.*

Som sagt vælger vi at udskyde beviset til en senere §. Sætningen fokuserer på det vanskelige problem om *eksistens* af mål. Naturligvis er også *entydighed* vigtig. Her er det nemmere at vise et brugbart resultat:

Sætning 4.1.2 *Lad $\lambda = (X, \mathcal{A}, \lambda)$ være en ikke-negativ reel mængdefunktion (obs: λ må altså ikke antage værdien $+\infty$) defineret på den $(\emptyset, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{A}$ og antag, at der findes en tællelig overdækning af X med mængder fra $\mathcal{A}$. Da er enhver udvidelse af λ til et mål entydigt bestemt på $\sigma(\mathcal{A})$.*

Bevis. Sæt $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$. Lad $X = \bigcup_1^\infty X_n$ med $X_n \in \mathcal{A}$; $n \geq 1$. Antag, at μ_1 og μ_2 begge er udvidelser af λ til mål. Sæt $\mathcal{A}_n = \mathrm{tr}_{\mathrm{X_n}}(\mathcal{A})$; $n \geq 1$ og $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{A}_n)$. Så er $\mathcal{B}_n = \mathrm{tr}_{\mathrm{X_n}}(\mathcal{B})$, se (2.11). Hold først n fast. Da kan vi anvende Dynkin's lemma, Sætning 2.3.2, til at slutte, at $\mu_1 = \mu_2$ på $\mathcal{B}_n$ (sammenlign også med Eksempel 2 i §2.3). Overvej! Så må $\mu_1 = \mu_2$ på $\mathcal{B}$. Dette kan f.eks. ses ved at skrive en mængde $B \in \mathcal{B}$ på formen

$$B = \bigcup_1^\infty B_n \quad \text{med} \quad B_n = B \cap (X_n \setminus \bigcup_{\nu < n} X_\nu).$$

Så er B_n'erne parvis disjunkte og $B_n \in \mathcal{B}_n$; $n \geq 1$. Derfor er $\mu_1(B) = \sum_1^\infty \mu_1(B_n) = \sum_1^\infty \mu_2(B_n) = \mu_2(B)$. $\square$

4.2 Konstruktion af Lebesgue- og Lebesgue-Stieltjes mål

Med resultatet fra sidste § til rådighed er det en smal sag at vise Lebesgue-målets eksistens.

Sætning 4.2.1 (Lebesgue-målets eksistens og entydighed) *Der findes et entydigt bestemt mål $\lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, der stemmer overens med længdemålet for intervaller. Målet kaldes* Lebesguemålet.

Bevis. Entydigheden er forholdsvis let at vise og beviset herfor overlades til læseren (med Sætning 4.1.2 til rådighed er det faktisk banalt!).

Dernæst koncentrerer vi os om det, vi opfatter som den vigtigste del af sætningen, eksistensen. Det viser sig teknisk bekvemt at tage udgangspunkt i halv-lukkede intervaller og længdefunktionen for sådanne intervaller. Lad os præcisere: Med $\mathcal{A}$ betegner vi brolægningen af venstre-åbne, højre-lukkede intervaller:

$$\mathcal{A} = \{]a, b] \mid -\infty < a \leq b < \infty\}\,.$$

Ved at tillade, at $a = b$ opnår vi, at $\emptyset \in \mathcal{A}$. Det er klart, at $\mathcal{A}$ er en $(\emptyset, \cap f)$-lukket brolægning. Vi definerer λ på $\mathcal{A}$ ved

$$\lambda(]a, b]) = b - a\,; \quad -\infty < a \leq b < \infty. \tag{4.5}$$

Så er λ stram. Thi, hvis $A =]a, b]$ med $a < b$ er indeholdt i $B =]c, d]$, må $c \leq a \leq b \leq d$ og $B \setminus A =]c, a] \cup]b, d]$, hvorfor

$$\begin{aligned} \lambda_*(B \setminus A) &\geq \lambda(]c, a]) + \lambda(]b, d]) \\ &= (a - c) + (d - b) \\ &= \lambda(B) - \lambda(A), \end{aligned}$$

og på den anden side er det klart, at for en vilkårlig disjunkt familie $A_1, \cdots, A_n$ af intervaller fra $\mathcal{A}$, indeholdt i $B \setminus A$, må $\lambda(A_1) + \cdots + \lambda(A_n) \leq \lambda(B) - \lambda(A)$ (se evt. beviset for næste sætning).

Vi bemærker nu, at λ har en approksimerende semikompakt brolægning. Lad nemlig $\mathcal{K}$ betegne brolægningen af lukkede intervaller og $\emptyset$:

$$\mathcal{K} = \{[a, b] \mid -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Så er $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{R})$ og dermed er $\mathcal{K}$ en semikompakt (endog en kompakt) brolægning, jvf. Sætning 2.5.1 og 2.5.2 (eller direkte). Det er klart, at $\mathcal{K}$ er en approksimerende brolægning for λ. Hvis nemlig $A =]a, b] \in \mathcal{A}$ og $a < b$ kan vi for $\varepsilon > 0$ (og $\varepsilon < b - a$) udnytte, at $]a + \varepsilon, b] \subseteq [a + \frac{1}{2}\varepsilon, b] \subseteq]a, b]$ til at slutte, at der findes $B \in \mathcal{A}$ og $K \in \mathcal{K}$ med $B \subseteq K \subseteq A$ og $\lambda(B) \geq \lambda(A) - \varepsilon$.

En anvendelse af Sætning 4.1.1 afslutter nu beviset. □

Stort set samme bevis kan bruges til at konstruere en lang række andre mål på $\mathbb{R}$, som vi nu skal se.

Sætning 4.2.2 (Lebesgue-Stieltjes mål i $\mathbb{R}$, eksistens og entydighed) *Lad $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en ikke-aftagende funktion og antag, at F er kontinuert fra højre. Da findes et entydigt bestemt mål $\mu_F = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_F)$ således, at*

$$\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$$

for alle $-\infty < a < b < \infty$. Målet μ_F kaldes Lebesgue-Stieltjes målet bestemt ved *F.*

Bevis. Såvel entydighed som eksistens bevises efter samme recept som ovenfor. Lad os nøjes med at se nærmere på eksistensen. Igen lader vi $\mathcal{A} = \{]a,b] \mid -\infty < a \leq b < \infty\}$. Denne gang definerer vi mængdefunktionen λ_F på $\mathcal{A}$ ved

$$\lambda_F(]a,b]) = F(b) - F(a)\,; \quad -\infty < a \leq b < \infty.$$

For at vise, at λ_F er stram, ser vi på $A =]a,b]$ med $a < b$ og $B =]c,d]$ således, at $A \subseteq B$. Vi har

$$\begin{aligned} (\lambda_F)_*(B \setminus A) &\geq \lambda_F\left(]c,a]\right) + \lambda_F\left(]b,d]\right) \\ &= (F(a) - F(c)) + (F(d) - F(b)) \\ &= \lambda_F(B) - \lambda_F(A). \end{aligned}$$

På den anden side må $(\lambda_F)_*(B \setminus A) \leq \lambda_F(B) - \lambda_F(A)$, thi er $A_1, \cdots, A_n$ parvis disjunkte mængder fra $\mathcal{A}$ indeholdt i $B \setminus A$, må hver mængde A_ν enten være indeholdt i $]c,a]$ eller i $]b,d]$ og vi må have en situation som skitseret på Figur 12 (hvor vi har

Figur 12

tænkt os, at der er to A_ν'er i $]c,a]$ og to i $]b,d]$). Ved at forstørre intervallerne A_ν som antydet på figuren indses let, at $\lambda_F(A_1) + \cdots + \lambda_F(A_n) \leq \lambda_F(B) - \lambda_F(A)$ må gælde. Da dette gælder alle endelige familier af parvis disjunkte $\mathcal{A}$-mængder indeholdt i $B \setminus A$, er $(\lambda_F)_*(B \setminus A) \leq \lambda_F(B) - \lambda_F(A)$.

Alt i alt har vi nu set, at λ_F er stram.

Dernæst viser vi, at λ_F har en approksimerende semikompakt brolægning. Igen ser vi på den semikompakte brolægning $\mathcal{K} = \{[a,b] \mid -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$. Lad $A =]a,b] \in \mathcal{A}$ med $a < b$. Da F er kontinuert fra højre i a findes, til $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ med $a < a + \delta < b$, så $F(a+\delta) < F(a) + \varepsilon$. Se nu på $K = [a + \frac{1}{2}\delta, b] \in \mathcal{K}$ og $B =]a+\delta, b] \in \mathcal{A}$ og bemærk, at $B \subseteq K \subseteq A$ og at $\lambda_F(B) = F(b) - F(a+\delta) > F(b) - F(a) - \varepsilon = \lambda_F(A) - \varepsilon$. Dette ræsonnement viser, at $\mathcal{K}$ er en approksimerende brolægning for λ_F. En anvendelse af Sætning 4.1.1 afslutter nu beviset $\square$

Øvelse 1. Vi har nøje påpeget, hvor i ovenstående bevis vi udnytter, at F er kontinuert fra højre. Men hvor i beviset udnyttes, at F er ikke-aftagende?

Man kan anvende idéerne bag de to viste sætninger til at konstruere interessante mål i højere-dimensionale euklidiske rum. Vi nøjes dog med at se på det *n-dimensionale Lebesguemål,* der angiver n-dimensionalt volumen. Mere præcist:

Sætning 4.2.3 (**n-dimensionalt Lebesguemål, eksistens og entydighed** *Lad $n \in \mathbb{N}$. Der findes da et entydigt bestemt mål $\lambda_n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, det* n-dimensionale Lebesguemål, *så det for alle $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ for hvilke $x_1 < y_1, \cdots, x_n < y_n$ gælder, at*

$$\lambda_n([x_1, y_1] \times \cdots \times [x_n, y_n]) = (y_1 - x_1) \cdot \cdots \cdot (y_n - x_n).$$

Bevisskitse. Entydigheden er som sædvanlig let. Vi koncentrerer os om eksistensen. Vi nøjes med at se på tilfældet $n = 2$. Vi ser her på brolægningen $\mathcal{A}$ af rektangler af formen $]x_1, y_1] \times]x_2, y_2]$ og mængdefunktionen, der til et sådant rektangel knytter værdien $(y_1 - x_1) \cdot (y_2 - x_2)$, altså rektanglets areal. Man efterviser, at denne mængdefunktion er stram og at den har en semikompakt approksimerende brolægning $\mathcal{K}$ (se på de lukkede rektangler). Resultatet følger så af Sætning 4.1.1. □

Bemærkning Sådan set er der ingen grund til her at arbejde med to brolægninger, $\mathcal{A}$ og $\mathcal{K}$. Vi kunne have nøjes med $\mathcal{K}$ (lukkede rektangler). Det er muligt, læseren havde foretrukket en sådan variant af beviserne for sætningerne 1 og 3, mens det er klarest at arbejde med to brolægninger i beviset for Sætning 2.

4.3 Mål og deres elementære egenskaber

Sætning 4.3.1 (Målenes elementære egenskaber) *Lad $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ være et mål. Da gælder følgende egenskaber, hvor alle optrædende mængder er antaget målelige:*

(i) *μ er* endeligt additiv, *dvs., hvis $A_1, \cdots, A_n$ er parvis disjunkte, så er*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

(ii) *μ er* modulær, *dvs.*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B),$$

(iii) *μ er* subtraktiv, *dvs.*

$$A \subseteq B \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A),$$

(iv) *der gælder følgende regel for* beregning ved disjunktifisering:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k\right),$$

(v) *der gælder følgende regel for* approksimation indefra *(eller* kontinuitet f.v.*):*

$$A_n \uparrow A \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A),$$

(vi) *der gælder følgende regel for* approksimation udefra *(eller* kontinuitet f.h.*):*

$$A_n \downarrow A \wedge \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \to \mu(A),$$

(vii) *μ er* monoton, *dvs.*

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B),$$

(viii) *μ er* tælleligt subadditiv, *dvs.*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bevis (i): Er $(A_k)_{k\le n}$ parvis disjunkte målelige mængder, er

$$\begin{aligned}\mu(A_1\cup\cdots\cup A_n) &= \mu(A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\cdots)\\ &= \mu(A_1)+\cdots+\mu(A_n)+\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)+\cdots\\ &= \mu(A_1)+\cdots+\mu(A_n).\end{aligned}$$

(ii): For vilkårlige målelige mængder A og B finder vi af (i), at

$$\begin{aligned}\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B) &= (\mu(A)+\mu(B\setminus A))+\mu(A\cap B)\\ &= \mu(A)+(\mu(B\setminus A)+\mu(A\cap B))\\ &= \mu(A)+\mu(B).\end{aligned}$$

(iii): Er A og B målelige og $A\subseteq B$, følger det af (i), at

$$\mu(A)+\mu(B\setminus A)=\mu(B)$$

og heraf følger $\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$ såfremt $\mu(A)<\infty$.

(iv): Lad $(A_n)_{n\ge1}$ være en vilkårlig følge af målelige mængder. Sætter vi

$$B_n=A_n\setminus\bigcup_{k<n}A_k\,;\quad n\ge1,$$

er $(B_n)_{n\ge1}$ en følge af parvis disjunkte målelige mængder med $\bigcup_1^\infty A_n$ som foreningsmængde. (Bemærk, at $B_1=A_1\setminus\emptyset=A_1$). Derfor er

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right)=\sum_{n=1}^\infty\mu\left(B_n\right),$$

hvilket skulle vises.

(v): Lad $(A_n)_{n\ge1}$ være en voksende følge af målelige mængder med foreningsmængde A, dvs. $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$ og $A=\bigcup_1^\infty A_n$ (kort: $A_n\uparrow A$). Af (iv) og (i) fås:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)=\sum_{n=1}^\infty\mu\left(A_n\setminus\bigcup_{k<n}A_k\right)\\ &= \mu\left(A_1\right)+\sum_{n=2}^\infty\mu\left(A_n\setminus A_{n-1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\mu(A_1)+\sum_{n=2}^N\mu(A_n\setminus A_{n-1})\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\mu\left(A_n\right).\end{aligned}$$

(vi): Antag $(A_n)_{n\ge1}$ er målelige mængder med $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$ og $\bigcap_1^\infty A_n=A$ (kort: $A_n\downarrow A$). Så vil $A_1\setminus A_n\uparrow A_1\setminus A$. Af (v) fås så, at

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_1\setminus A_n)=\mu(A_1\setminus A).$$

Hvis yderligere $\mu(A_1) < \infty$ fås af (iii), at

$$\lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \mu(A),$$

hvoraf $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ følger, idet vi igen udnytter, at $\mu(A_1) < \infty$.

(vii) er triviel hvis $\mu(B) = \infty$ og følger ellers af (iii).

(viii) følger af (iv) og (vii). □

De tre første egenskaber i sætningen kan sammenfattes i ét resultat, der samtidig er mere generelt. Man kan f.eks. ledes frem til dette resultat ved at se på modulariteten. Dér kan man sige, at "grunden" til resultatet er den, at de to funktioner $1_{A\cup B} + 1_{A\cap B}$ og $1_A + 1_B$ er identiske. Dette er først en god grund, når man til funktioner som dem, der optræder her, har knyttet en talværdi. Til $1_{A\cup B} + 1_{A\cap B}$ knyttes tallet $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$, til $1_A + 1_B$ knyttes tallet $\mu(A) + \mu(B)$. Disse to tal er så ens.

Læseren har måske allerede lugtet lunten: "Jamen, er det ikke integralet af funktionerne, du er ude efter?" Jo, netop!

Øvelse 1. Lad μ = Lebesguemålet. Tegn funktioner hørende til Sætning 1, (i), (ii) og (iii) og indse, at resultaterne kan formuleres som resultater om (sædvanlige) integraler, i hvert fald for pæne mængder.

Integralbegrebet er et af de allervigtigste i målteorien. Allerede her i denne indledende § om målene skal vi indføre dette begreb, men kun for simple funktioner. Det elementære resultat, der kommer til at spille en vigtig rolle i opbygningen af det generelle integralbegreb, er følgende:

Sætning 4.3.2 (Integral for simple funktioner) *Lad $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Hvis en funktion $f : X \to \mathbb{R}$ har en repræsentation af formen*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

med $n \in \mathbb{N}$, α_i'erne ikke-negative reelle tal og A_i'erne målelige mængder, så er værdien af $\sum_1^n \alpha_i \mu(A_i)$ uafhængig af den aktuelle repræsentation, idet der gælder formlen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{t\in\mathbb{R}} t \cdot \mu(f^{-1}(t)). \qquad (4.6)$$

Bevis. Hvis A_i'erne er parvis disjunkte, er (4.6) let at vise. Men der er problemer, når A'erne ligger "hulter til bulter" i forhold til hinanden. Man kan klare problemerne ved enten at reducere til det disjunkte tilfælde (del X op i de områder, A'erne definerer) eller ved induktion efter n. Vi vælger det sidste.

Induktionsstarten, hvor $n = 1$ er klar. Lad os gennemføre induktionstrinnet. Det er vigtigt, at præcisere induktionsantagelsen. Den går ud på at det for ethvert målrum $(X', \mathcal{B}', \mu')$ og enhver funktion f defineret på X' og med en repræsentation $f = \sum_1^n \alpha_i 1_{A_i}$ som angivet gælder, at (4.6) holder.

Nu holdes n fast og vi ser på et målrum $(X, \mathcal{B}, \mu)$ og en funktion med en repræsentation som angivet, men med $n+1$ dele:

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i 1_{A_i}.$$

Definér to nye målrum $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ ved

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{n+1},\ \mathcal{B}_1 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_1}\mathcal{B},\ \mu_1(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}) \text{ for } \mathrm{A} \in \mathcal{B}_1, \\ X_2 &= \complement A_{n+1} = X \setminus A_{n+1},\ \mathcal{B}_2 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_2}\mathcal{B},\ \mu_2(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}) \text{ for } \mathrm{A} \in \mathcal{B}_2. \end{aligned}$$

(Disse målrum er *restriktioner* af $(X, \mathcal{B}, \mu)$, se evt. §6.2).

Vi ser på funktionerne $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ og $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i \cap A_{n+1}}, \quad f_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i \setminus A_{n+1}}.$$

Ifølge induktionsantagelsen er

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_1 \left(A_i \cap A_{n+1}\right) = \sum_{t \in \mathbb{R}} t \cdot \mu \left(f_1^{-1}(t)\right) \tag{4.7}$$

og tilsvarende for f_2. Nu er

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(t) &= \{x \in X_1 \mid f_1(x) = t\} = A_{n+1} \cap \left\{ x \in X \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(x) = t \right\} \\ &= f^{-1}(t + \alpha_{n+1}) \cap A_{n+1} \end{aligned}$$

og

$$f_2^{-1}(t) = \{x \in X_2 \mid f_2(x) = t\} = f^{-1}(t) \setminus A_{n+1}.$$

Vi finder dermed af (4.7) og den analoge ligning for f_2, at

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \left(\mu(A_i \cap A_{n+1}) + \mu(A_i \setminus A_{n+1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_1(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_2(A_i \setminus A_{n+1}) + \alpha_{n+1}\mu(A_{n+1}) \\ &= \sum_{t \in \mathbb{R}} t\mu\left(f^{-1}(t + \alpha_{n+1}) \cap A_{n+1}\right) + \sum_{t \in \mathbb{R}} t\mu\left(f^{-1}(t) \setminus A_{n+1}\right) + \alpha_{n+1}\mu(A_{n+1}) \end{aligned}$$

og, ved at skrive t i første sum på formen $t = (t + \alpha_{n+1}) - \alpha_{n+1} = s - \alpha_{n+1}$, kan vi fortsætte omskrivningerne som følger:

$$\begin{aligned}
\cdots &= \sum_{s\in\mathbb{R}} s\mu\left(f^{-1}(s) \cap A_{n+1}\right) - \alpha_{n+1}\mu(A_{n+1}) + \sum_{t\in\mathbb{R}} t\mu(f^{-1}(t) \setminus A_{n+1}) + \alpha_{n+1}\mu(A_{n+1}) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{R}} t\left(\mu(f^{-1}(t) \cap A_{n+1}) + \mu(f^{-1}(t) \setminus A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{R}} t \cdot \mu(f^{-1}(t)),
\end{aligned}$$

ganske som ønsket.

Da således både induktionsstarten og induktionstrinnet er gennemført, er den generelle gyldighed af (4.6) godtgjort. □

Bemærkninger Forudsætningen om α_i'erne (reelle, ikke-negative) kan lempes ganske meget. Det eneste vi skal passe på er, at vi ikke løber ind i problemer med $\infty - \infty$. Det er endvidere væsentligt, at vi holder os til funktioner, der er repræsenteret ved endelige summer (se Opgave 12, der viser, hvor galt det kan gå, hvis vi bryder denne restriktion). Den naturlige udvidelse af resultatet er dermed til funktioner $f = \sum_1^n \alpha_i 1_{A_i}$ med målelige A'er og udvidet reelle α'er, hvor ikke begge værdier $\pm\infty$ forekommer. Den interesserede læser kan let gennemføre denne udvidelse. Men vores væsentlige interesse i sætningen er i det ikke-negative tilfælde, hvilket også afpejles i nedenstående vigtige definition.

Endelig bemærker vi, hvad der bør være klart, at Sætning 2 ikke har meget at gøre med målets numerable additivitet. Vi udnytter faktisk kun den endelige additivitet (samt at $\mu(\emptyset) = 0$ og at μ er defineret på en algebra). Sætning 2 gælder derfor for nogle mere generelle mængdefunktioner end mål (de endeligt additive mål), men vi får ikke brug for dette i disse noter.

Definition 4.3.1 *(integralet for simple ikke-negative funktioner).* Integralet af en simpel ikke-negativ funktion f defineres ved ligningen

$$\int f d\mu = \sum_{t\in\mathbb{R}} t \cdot \mu(f^{-1}(t)) \tag{4.8}$$

Naturligvis kunne vi i (4.8) have nøjedes med at summere over $t \geq 0$. Med denne definition kan Sætning 2 sammenfattes i formlen

$$\int \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}\right) d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i). \tag{4.9}$$

Øvelse 2. Diskutér Sætning 1, (i), (ii) og (iii) under inddragelse af det indførte integral for (ikke-negative) simple funktioner.

4.4 Endelighedsbetingelser for mål, diskrete mål

Definition 4.4.1 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Målet μ er et *sandsynlighedsmål,* hvis $\mu(X) = 1$. Målet er et *endeligt mål,* hvis $\mu(X) < \infty$. Målet er *σ-endeligt,* hvis der findes en følge $(X_n)_{n\geq 1}$ af målelige mængder med endeligt mål som overdækker X (altså $\mu(X_n) < \infty$; $n \geq 1$ og $X = \bigcup_1^\infty X_n$ skal gælde).

EKSEMPEL 1. Lebesguemålene λ_n på $\mathbb{R}^n$ er σ-endelige, ikke-endelige mål. Lebesgue-Stieltjes målene μ_F på $\mathbb{R}$ er også σ-endelige mål. Nogle af dem er endelige mål (kræver $\lim_{x\to-\infty} F(x) > -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$) og nogle er sandsynlighedsmål. □

ØVELSE 1. I eksemplet ovenfor antydede vi en egenskab for F med relation til egenskaben μ_F endelig. Vis, at det drejer sig om en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at μ_F er et endeligt mål.

EKSEMPEL 2. Lad X være en mængde og $x \in X$. Ved *Dirac-målet ε_x i x* (eller *ét-punktsmålet* i x) forstås målet ε_x defineret på $\mathcal{P}(X)$ ved

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1\,; & x \in A \\ 0\,; & x \notin A. \end{cases}$$

Det er klart et sandsynlighedsmål på X.

Hvis $\mathcal{B}$ er en σ-algebra i X, forskellig fra $\mathcal{P}(X)$, vil restriktionen af ε_x til $\mathcal{B}$ ligeledes være et sandsynlighedsmål. Ofte vil man også referere til dette mål som Dirac-målet i x, og benævne det ε_x, specielt hvis $\mathcal{B}$ indeholder alle singleton'er ($\{a\} \in \mathcal{B}$ for alle $a \in X$). Hvis f.eks. X er et topologisk rum, kan vi tale om ε_x, hvor vi har ε_x defineret på den naturlige Borelstruktur $\mathcal{B}(X)$ i tankerne.

At ε_x også omtales som et ét-punktsmål, skyldes, at hele massen er koncentreret i ét punkt idet $\varepsilon_x(\{x\}) = 1$ (og $\varepsilon_x(\complement\{x\}) = 0$). □

Ved at lægge ét-punktsmål sammen fås en vigtig, men ret elementær klasse af mål. Lad os først notere, at vi altid kan lægge mål sammen.

Sætning 4.4.1 (i) *Lad $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ være et mål og $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_+$. Så er $\alpha \cdot \mu$ også et mål, hvor $(\alpha \cdot \mu)(A) = \alpha \cdot \mu(A)$; $A \in \mathcal{B}$.*

(ii) *Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum og lad $(\mu_i)_{i\in I}$ være en vilkårlig familie af mål, alle defineret på $\mathcal{B}$. Så er også $\sum_{i\in I} \mu_i$ et mål, hvor*

$$\left(\sum_{i\in I} \mu_i\right)(A) = \sum_{i\in I} \mu_i(A)\,; \quad A \in \mathcal{B}.$$

Bevis. (i) overlades til læseren.

(ii): Her udnyttes det almindelige begreb for uendelige rækker, se Appendix 1.11. Vi har

$$\left(\sum_{i\in I} \mu_i\right)(\emptyset) = \sum_{i\in I} \mu_i(\emptyset) = \sum_{i\in I} 0 = 0$$

og for en følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af parvis disjunkte målelige mængder,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) &= \sum_{i\in I}\mu_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\\ =\sum_{i\in I}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_i(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in I}\mu_i(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i\in I}\mu_i\right)(A_n).\end{aligned}$$

Dermed er $\sum_{i\in I}\mu_i$ numerabelt additiv (og 0 i $\emptyset$). $\square$

Kombineres sætningens to dele ses, at mål på formen $\sum_{i\in I}\alpha_i\mu_i$ giver mening, hvor α_i'erne er ≥ 0.

EKSEMPEL 3. Lad $(X,\mathcal{B})$ være et Borelrum så alle singletoner er målelige (typisk $\mathcal{B}=\mathcal{P}(X)$ eller $\mathcal{B}=\mathcal{B}(X)$, hvis X er et topologisk rum).

Lad $x \curvearrowright \alpha_x$ være en vilkårlig funktion af X ind i $\bar{\mathbb{R}}_+$. Målet $\sum_{x\in X}\alpha_x\cdot\varepsilon_x$ kaldes et *diskret mål.* Det "diskrete" ligger i at disse mål er fuldstændig bestemt ved deres værdier på singletoner. Vi har nemlig

$$\left(\sum_{x\in X}\alpha_x\cdot\varepsilon_x\right)(\{x_0\})=\alpha_{x_0}\,; \quad x_0\in X.$$

Generelt er

$$\left(\sum_{x\in X}\alpha_x\cdot\varepsilon_x\right)(A)=\sum_{\{x|x\in A\}}\alpha_x.$$

Et ofte benyttet diskret mål er *tællemålet,* der svarer til konstant-afbildningen $x\curvearrowright 1$ (altså $\alpha_x\equiv 1$). Kaldes tællemålet η, har vi

$$\eta(A)=\begin{cases}\infty\,; & A \text{ uendelig}\\ \#A\,; & A \text{ endelig.}\end{cases}$$

Her betegner # "antallet af elementer i $\cdots$".

Lad $\mu=\sum_{x\in X}\alpha_x\cdot\varepsilon_x$ være et vilkårligt diskret mål. Så er $\mu(X)=\sum_{x\in X}\alpha_x$. Målet er dermed endeligt, hvis denne sum er endelig. Hvis dette er tilfældet, må $\alpha_x=0$ på nær højst numerabelt mange $x\in X$. For hvert $n\geq 1$ må mængden X_n af de $x\in X$ for hvilke $\alpha_x\geq 1/n$ nemlig være endelig og derfor er $\bigcup_1^{\infty}X_n$ tællelig. Men $\bigcup_1^{\infty}X_n$ er netop mængden af $x\in X$ for hvilke $\alpha_x>0$.

Blandt de diskrete endelige mål spiller sandsynlighedsmålene en betydelig rolle i sandsynlighedsregningen og statistikken. Disse mål kaldes de *diskrete sandsynlighedsfordelinger* på X. For $X=\mathbb{R}$ og $X=\mathbb{R}^n$ tæller disse mål vigtige fordelinger som binomialfordelingen, Poisson-fordelingen og multinomialfordelingen. Der henvises til lærebøger i sandsynlighedsregning og statistik. $\square$

ØVELSE 2. Vis, at Lebesguemålet ikke er diskret (præcisér først spørgsmålet).

4.5 Fuldstændiggørelse af mål, begrebet "næsten overalt"

Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. En *nulmængde,* mere udførligt en *μ-nulmængde*, er en mængde $N \in \mathcal{B}$ med $\mu(N) = 0$. Set ud fra målet μ, er en sådan mængde "lille", og hvad der sker på nulmængder er i mange henseender uden betydning. Det samme bør så gælde en delmængde af en nulmængde. Det gør det også, men der er en sær vanskelighed: En delmængde af en nulmængde behøver ikke være en nulmængde! Den behøver nemlig ikke være målelig. Der findes banale eksempler til at vise dette (se f.eks. på nul-målet på den diffuse Borelstruktur), men fænomenet forekommer også i mere interessante situationer.

$*$ Eksempel 1. Vi ser på Lebesguemålet $\lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Det er ikke let (men dog muligt) eksplicit at pege på en delmængde af en nulmængde som ikke er målelig. Men det er let at vise, at sådanne mængder findes. Det fremgår af §1.1, se Øvelse 3, at Cantormængden C er en λ-nulmængde og at $\operatorname{card}(\mathrm{C}) = 2^{\aleph_0}$. Hvis nu alle delmængder af C var målelige, altså Borelmængder i $\mathbb{R}$, ville der være $2^{2^{\aleph_0}}$-mange Borelmængder, og dermed flere end $2^{\aleph_0}$-mange Borelmængder ifølge Cantor's Sætning (se Appendix 1.8). Men det strider mod Korollar 2.2.3. Vi slutter, at der findes delmængder af nulmængden C, som ikke er Borelmængder. $\square$

Mål, hvor det diskuterede fænomen ikke forekommer, spiller en vis rolle.

Definition 4.5.1 Et mål $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ er *fuldstændigt,* hvis enhver delmængde af en nulmængde er målelig (og dermed selv en nulmængde).

Kravet her er et krav om at Borelstrukturen er tilstrækkelig righoldig i forhold til målet. Det er $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ altså ikke, når talen er om Lebesguemålet. Vanskeligheden kan imidlertid overkommes ved at udvide Borelstrukturen og målet.

Definition 4.5.2 Lad $\mu_1 = (X, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ og $\mu_2 = (X, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ være mål på samme grundmængde X. Vi siger, at μ_2 er en *udvidelse* af μ_1 såfremt $\mathcal{B}_2 \supseteq \mathcal{B}_1$ og $\mu_2(B) = \mu_1(B)$ for alle $B \in \mathcal{B}_1$. Vi siger også, at μ_1 er en *indskrænkning* af μ_2, hvis dette gælder.

Bemærkning. I stedet for indskrænkning *kan* man tale om en restriktion; vi foretrækker dog at reservere denne betegnelse til en anden situation (se Kapitel VI).

Sætning 4.5.1 *Lad $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ være et mål. Definer $\bar{\mu} = (X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$ ved*

$$\mathcal{B}_\mu = \{A \subseteq X \mid \exists B_0 \in \mathcal{B}, B_1 \in \mathcal{B} : B_0 \subseteq A \subseteq B_1 \wedge \mu(B_1 \setminus B_0) = 0\}, \tag{4.10}$$

$$\bar{\mu}(A) = \mu(B_0)\,; \quad A \in \mathcal{B}_\mu \tag{4.11}$$

hvor B_0 har relationen til A angivet i (4.10).

Da er $(X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$ en udvidelse af $(X, \mathcal{B}, \mu)$ til et fuldstændigt mål.

Bevis. $\mathcal{B}_\mu$ er veldefineret ved (4.10). At $\bar{\mu}$ er veldefineret ved (4.11) følger af, at hvis B_0' og B_1' har samme forhold til $A \in \mathcal{B}_\mu$ som B_0 og B_1, vil $B_0' \subseteq B_0 \cup (B_1 \setminus B_0)$, hvorfor $\mu(B_0') \leq \mu(B_0)$ og tilsvarende vil $\mu(B_0) \leq \mu(B_0')$, således, at $\mu(B_0) = \mu(B_0')$ må gælde.

$\mathcal{B}_\mu$ er en σ-algebra: $\mathcal{B}_\mu$ er klart lukket under $\complement$ og også lukket under $\cup c$, da $B_{n0} \subseteq A_n \subseteq B_{n1}, \mu(B_{n1} \setminus B_{n0}) = 0$; $n \geq 1 \Rightarrow \cup B_{n0} \subseteq \cup A_n \subseteq \cup B_{n1}$ med $\mu(\cup B_{n1} \setminus \cup B_{n0}) \leq \mu(\cup(B_{n1} \setminus B_{n0})) \leq \sum \mu(B_{n1} \setminus B_{n0}) = 0$.

μ er et mål på $\mathcal{B}_\mu$: Klart, at $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$. Hvis $(A_n)_{n\geq 1}$ er parvis disjunkte mængder fra $\mathcal{B}_\mu$ og $B_{n0} \subseteq A_n \subseteq B_{n1}$ bestemmes i henhold til definitionen af $\mathcal{B}_\mu$, ses af $\cup B_{n0} \subseteq A_n \subseteq \cup B_{n1}$ og $\mu(\cup B_{n1} \setminus \cup B_{n0}) = 0$, at $\bar{\mu}(\cup A_n) = \mu(\cup B_{n0}) = \sum \mu(B_{n0}) = \sum \bar{\mu}(A_n)$, hvoraf følger, at $\bar{\mu}$ er numerabelt additiv.

$(X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$ er et fuldstændigt mål: Hvis $A \in \mathcal{B}_\mu$, hvis $A_0 \subseteq A$ og hvis $\bar{\mu}(A) = 0$, findes $B_0 \subseteq A \subseteq B_1$ med $\mu(B_0) = 0$ og $\mu(B_1 \setminus B_0) = 0$. Så vil $\emptyset \subseteq A_0 \subseteq B_1$ og $\mu(B_1 \setminus \emptyset) = \mu(B_1) = 0$, hvorfor $A_0 \in \mathcal{B}_\mu$.

Endelig er det banalt, at $\bar{\mu}$ er en udvidelse af μ. □

Definition 4.5.3 Målet $\bar{\mu} = (X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$ konstrueret ud fra $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ i Sætning 1 kaldes *fuldstændiggørelsen* af μ. Er $P(x)$ en egenskab, der kan knyttes til et vilkårligt $x \in X$, siges egenskaben at gælde *næsten overalt,* eller mere præcist μ-*næsten overalt,* hvis mængden af de $x \in X$ for hvilke $P(x)$ ikke gælder er en $\bar{\mu}$-nulmængde. I så fald skrives $P(x)$ n.o., eventuelt $P(x)$ μ-n.o.

ØVELSE 1. Vis, at $P(x)$ n.o. er ensbetydende med at der findes en μ-nulmængde N, så det for alle $x \in X$ for hvilke $P(x)$ er falsk gælder, at $x \in N$ eller, ækvivalent, at der findes en μ-nulmængde N, så $P(x)$ er sand for alle $x \in \complement N$.

ØVELSE 2. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Vis, at relationen "= n.o." på mængden af udvidet reelle funktioner på X er en ækvivalensrelation.

Vis også, at såfremt $f_n = g_n$ n.o. for alle $n \geq 1$, så vil alle rimelige kombinationer, man kan danne ud fra f_n'erne stå i relationen "= n.o." til den tilsvarende kombination af g_n'erne; f.eks. gælder $\sup f_n = \sup g_n$ n.o., $\liminf f_n = \liminf g_n$ n.o. og $\sum f_n = \sum g_n$ n.o. Det sidste kræver dog, at funktionerne $\sum f_n$ og $\sum g_n$ er veldefinerede (hvilket f.eks. er tilfældet, hvis alle funktioner er ≥ 0).

I forbindelse med den vigtige relation "= n.o." indført i Øvelse 2 nævnes, at man også indfører "= n.o. på A", hvor $A \subseteq X$, ved: $f = g$ n.o. på $A \Leftrightarrow \exists N$ μ-nulmængde $\forall x \in A \setminus N : f(x) = g(x)$. Mere generelt kan man for en egenskab $P(x)$ tale om at egenskaben gælder n.o. på A.

Når man studerer et målrum $(X, \mathcal{B}, \mu)$, er man ofte interesseret i egenskaber, der gælder næsten overalt. Efter definitionen indebærer det, at man går over til fuldstændiggørelsen $(X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$. Imidlertid er det let at udtrykke næsten overalt egenskaber direkte med reference til μ (jvf. Øvelse 1), så man behøver ikke gå over til $\bar{\mu}$.

For vores hovedeksempel, Lebesguemålet λ på $\mathbb{R}$ eller λ_n på $\mathbb{R}^n$, hvor definitionsområdet i henhold til vor behandling i §2 er den naturlige Borelstruktur ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ eller $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$), kalder vi de udvidede σ-algebraer, $\mathcal{B}_\lambda(\mathbb{R})$ eller $\mathcal{B}_{\lambda_n}(\mathbb{R}^n)$ for σ-algebraerne af *Lebesguemålelige mængder.* Vi indfører ikke noget nyt navn for de fuldstændiggjorte mål $(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}_n)$. Og normalt vil vi slet ikke bruge notationen med overstregning. Når vi således i fremtiden taler om Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$, er det sådan set ikke klart, om vi mener det oprindelige mål eller fuldstændiggørelsen. Normalt vil det fremgå af sammenhængen, hvad meningen er – og hyppigt er det underordnet, om det er det ufuldstændige eller det fuldstændige mål, der tænkes på.

4.6 Konstruktion af mål

[1]

Vi skylder et bevis for Sætning 4.1.1, der var central ved konstruktionen af Lebesgue- og Lebesgue-Stieltjes målene. Desuden vil vi bevise nogle beslægtede resultater om konstruktion af mål.

Det er ikke let at konstruere mål, og den vej, vi vælger at gå, er ikke specielt intuitiv. Men faktisk findes der ikke rigtig muligheder, der er mere intuitive. Strategien, vi følger, går tilbage til Carathéodory (ca. 1915) og går ud på først at skaffe sig en mængdefunktion defineret på hele potensmængden $\mathcal{P}(X)$, hvor X er den relevante grundmængde, og så indskrænke mængdefunktionen ved at pille de mængder ud, der "opfører sig pænt". Gøres dette på den rigtige måde, fås en σ-algebra, så restriktionen af mængdefunktionen hertil er et mål.

Vi får brug for abstrakte mængdefunktioner med alle mulige slags egenskaber. Lad os samle, hvad vi får brug for i én lidt træls definition (definitionskompleks). Det kommer så til at indeholde "alt". Vi gentager endda definitionen på et mål for fuldstændighedens skyld. Læseren kan gerne vælge at springe det over i første omgang og kun vende tilbage hertil når behovet opstår. Vi har også samlet en oversigt i Appendix IV, der måske er mere bekvem.

Definition 4.6.1 (Målteoriens mængdefunktioner) Lad $\kappa = (X, \mathcal{E}, \kappa)$ være en mængdefunktion med værdier i $[0, \infty]$. Mængder, der optræder i det følgende er alle antaget at tilhøre $\mathcal{E}$. κ er *monoton,* hvis $E \subseteq F \Rightarrow \kappa(E) \leq \kappa(F)$. κ er *subadditiv,* hvis $\kappa(E \cup F) \leq \kappa(E) + \kappa(F)$. κ er *superadditiv,* hvis $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \kappa(E \cup F) \geq \kappa(E) + \kappa(F)$. κ er *modulær,* hvis $\kappa(E \cup F) + \kappa(E \cap F) = \kappa(E) + \kappa(F)$. Gælder uligheden "$\leq$" her, er κ *submodulær* og gælder "$\geq$", er κ *supermodulær.* κ er *additiv,* hvis $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \kappa(E \cup F) = \kappa(E) + \kappa(F)$. κ er *endeligt additiv,* hvis $n \in \mathbb{N} \wedge E_1, \cdots, E_n$ parvis disjunkte $\Rightarrow \kappa(\bigcup_1^n E_k) = \sum_1^n \kappa(E_k)$. κ er *endelig,* hvis for alle E (underforstået i $\mathcal{E}$), $\kappa(E) < \infty$. κ er *endeligt funderet,* hvis $\kappa(E) = \infty \Rightarrow \forall t < \infty \exists F \subseteq E\colon t \leq \kappa(F) < \infty$.

κ er *tælleligt subadditiv,* hvis $\kappa(\bigcup_1^\infty E_n) \leq \sum_1^\infty \kappa(E_n)$. κ er *tælleligt additiv,* hvis det for enhver tællelig familie $(E_i)_{i \in I}$ af parvis disjunkte mængder gælder, at $\kappa(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} \kappa(E_i)$. Hvis κ er monoton, siges κ at være *kontinuert fra venstre* (evt˙*kontinuert indefra*), hvis $E_n \uparrow E \Rightarrow \kappa(E_n) \to \kappa(E)$ og κ siges at være *kontinuert fra højre* (evt. kontinuert udefra), hvis $E_n \downarrow E$, $\kappa(E_1) < \infty \Rightarrow \kappa(E_n) \to \kappa(E)$; hvis sidste egenskab kun antages for $E = \emptyset$ og $\emptyset \in \mathcal{E}$ og $\kappa(\emptyset) = 0$, siges κ at være *kontinuert fra højre i* $\emptyset$. Hvis, igen, κ antages at være monoton, siges κ at være *τ-kontinuert fra venstre,* hvis, for en vilkårlig familie $(E_i)_{i \in I}$ af $\mathcal{E}$-mængder, det gælder, at $E_i \uparrow E \Rightarrow \kappa(E_i) \to \kappa(E)$, og κ er *τ-kontinuert fra højre,* hvis

[1] Vi stjerner denne §. Den er teknisk og skrevet på en sammentrængt form. Den kan springes over. Dog forventes det, at læseren sætter sig ind i indholdet (ikke beviserne!) af sætningerne (især nr. 7, 9, 10 og 13 og korollarerne 2 og 3). Desuden peges på Sætning 1, der udnyttes sidenhen (Kapitel VI). Tilføjelse (august 1998): Der udarbejdes til kurset i E98 ekstra noter, der på mere rolig, tilgængelig vis gennemgår væsentlige dele af dette stof.

$E_i \downarrow E \wedge \exists i_0 \in I : \kappa(E_{i_0}) < \infty \Rightarrow \kappa(E_i) \to \kappa(E)$. Hvis, i sidste definition, $\emptyset \in \mathcal{E}$, $\kappa(\emptyset) = 0$ og vi kun betragter tilfældet $E = \emptyset$, fås definitionen på at κ er *τ-kontinuert fra højre i $\emptyset$.*

Hvis $\mathcal{E}$ er $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket og κ er endelig, monoton subadditiv og additiv, er κ et *indhold.* Hvis $\mathcal{E}$ er en algebra, $\kappa(\emptyset) = 0$ og κ er endeligt additiv, kaldes κ et *endeligt additivt mål.* Hvis $\mathcal{E}$ er en σ-algebra, $\kappa(\emptyset) = 0$ og κ er tælleligt additiv, er κ et *mål.* Det endeligt additive mål κ er *fuldstændigt,* hvis, for en vilkårlig mængde $A \subseteq X$, der gælder implikationen $\forall \varepsilon > 0 \exists E_1 \subseteq A \subseteq E_2 : \kappa(E_2 \setminus E_1) < \varepsilon \Rightarrow A \in \mathcal{E}$.

Vi kalder κ et *indre indhold,* såfremt $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$, $\kappa(\emptyset) = 0$ og κ er monoton og superadditiv; er κ yderligere kontinuert fra højre, er κ et *indre mål.* Vi kalder κ et *ydre indhold,* såfremt $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$, $\kappa(\emptyset) = 0$ og κ er monoton og subadditiv; er κ yderligere tælleligt subadditiv er κ et *ydre mål.*

Bemærkninger. Vi kunne have generaliseret yderligere ved at tillade, at κ kunne antage negative værdier (eller vi kunne, for de deldefinitioner, der ikke bygger på $\mathbb{R}$'s ordning, se på mængdefunktioner med værdier i mere generelle strukturer, f.eks. kummutative semigrupper).

Vær opmærksom på kravet om at alle optrædende mængder er sten i brolægningen $\mathcal{E}$. F.eks. for en subadditiv mængdefunktion κ, kræves *ikke,* at $\mathcal{E}$ er lukket under $(\cup f)$. Kravet er altså, at hvis $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}$ og *hvis* $E \cup F \in \mathcal{E}$, så vil $\kappa(E \cup F) \leq \kappa(E) + \kappa(F)$.

Tilsvarende præcisering gælder alle de andre deldefinitioner. Som en konsekvens kan vi f.eks. pege på, at en additiv mængdefunktion ikke behøver være endeligt additiv, men selvfølgelig er det, hvis $\mathcal{E}$ er $(\cup f)$-lukket. Og vi kan udmærket godt tale om, f.eks. at et endeligt additivt mål er kontinuert fra venstre eller tælleligt additivt (uden at talen behøver være om et mål, idet $\mathcal{E}$ kun behøver være en algebra, ikke en σ-algebra).

For at skelne kontinuitetsegenskaberne fra hinanden (med og uden τ), tales også om *σ-kontinuitet,* når vi vil understrege, at vi ser på en følge af mængder. Vedrørende τ-kontinuitet, lad os f.eks. se på τ-kontinuitet fra venstre, mindes om, at $E_i \uparrow E$ betyder, at familien $(E_i)_{i \in I}$ er opad filtrerende (I_0 endelig $\subseteq I \Rightarrow \exists i_0 \in I : \bigcup_{i \in I_0} E_i \subseteq E_{i_0}$) med foreningsmængde E (se Appendix 1.5, s. 7 – som jeg dog til næste udgave må udvide lidt – samt evt. § 3.5, s. 50).

Bemærk sprogbrugen, der er fastlåst international standard, hvorefter ingen af begreberne "endeligt additivt mål", "indre mål" eller "ydre mål" indebærer, at der nødvendigvis er tale om mål.

Vedrørende indre og ydre mål bemærker vi en vis asymmetri. Et ydre mål er tælleligt subadditivt, men vi forlangte ikke om et indre mål, at det skal være "tælleligt superadditivt". Vi definerede ingen gang dette begreb. Og med god grund, thi er κ monoton og superadditiv og er $\mathcal{E}$ $(\cup f)$-lukket, er κ "vilkårligt superadditiv" i den forstand, at for en vilkårlig familie $(E_i)_{i \in I}$ af parvis disjunkte mængder fra $\mathcal{E}$ med $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{E}$, vil $\kappa(\bigcup_{i \in I} E_i) \geq \sum_{i \in I} \kappa(E_i)$ (overvej!). Så der er ikke noget ved at forlange stærkere former for superadditivitet ved definitionen af et indre mål. I stedet hæfter vi os ved kontinuitet fra højre.

ØVELSE 1. Vis, at et mål μ er fuldstændigt efter definitionen ovenfor, hvis og kun hvis μ er fuldstændigt efter den tidligere givne definition (§ 4.5).

Vi går ikke direkte i gang med at vise sætninger om konstruktion af mål. Vores første resultat vedrører approksimation, og er et nyttigt lemma, vi sidenhen (Kapitel VI) også vil få glæde af. Vi definerer først:

Definition 4.6.2 Lad $(X, \mathcal{E}, \kappa)$ være en monoton ikke-negativ mængdefunktion og lad $\mathcal{K}$ og $\mathcal{G}$ være to brolægninger på X. Vi siger da, at $\mathcal{K}$ er en *indre approksimerende* og $\mathcal{G}$ en *ydre approksimerende brolægning* for κ såfremt hhv.

$$\forall E \in \mathcal{E} : \kappa(E) = \sup\{\kappa(F) \mid F \in \mathcal{E} \land \exists K \in \mathcal{K} : F \subseteq K \subseteq E\}$$

og

$$\forall E \in \mathcal{E} : \kappa(E) = \inf\{\kappa(F) \mid F \in \mathcal{E} \land \exists G \in \mathcal{G} : E \subseteq G \subseteq F\}$$

gælder.

Bemærk, at første del af definitionen er en gentagelse af Definition 4.1.3.

Sætning 4.6.1 (klemme-ind-imellem lemmaet) *Lad $(X, \mathcal{E}, \kappa)$ være en monoton mængdefunktion på den $(\cup f, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{E}$ og antag, at brolægningen $\mathcal{K}$ er en indre, og brolægningen $\mathcal{G}$ en ydre approksimerende brolægning for κ.*

(i) *Hvis κ er supermodulær og $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ en aftagende følge med $\kappa(E_1) < \infty$ findes, til hvert $t < \lim \kappa(E_n)$, en følge $(\widetilde{E}_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ og en følge $(K_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{K}$ så inklusionerne i følgende diagram gælder:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
E_1 & & \supseteq & & E_2 & & \supseteq & & E_3 & & \supseteq & & \cdots \\
\cup\!\vert & & & & \cup\!\vert & & & & \cup\!\vert & & & & \\
K_1 & \supseteq & \widetilde{E}_1 & \supseteq & K_2 & \supseteq & \widetilde{E}_2 & \supseteq & K_3 & \supseteq & \widetilde{E}_3 & \supseteq & \cdots
\end{array}$$

og så $\lim \kappa(\widetilde{E}_n) > t$.

(ii) *Hvis κ er submodulær og $(E_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ en voksende følge findes, til hvert $t > \lim \kappa(E_n)$, en følge $(\widetilde{E}_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{E}$ og en følge $(G_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{G}$, så inklusionerne i følgende diagram gælder:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
E_1 & & \subseteq & & E_2 & & \subseteq & & E_3 & & \subseteq & & \cdots \\
\cap\!\vert & & & & \cap\!\vert & & & & \cap\!\vert & & & & \\
G_1 & \subseteq & \widetilde{E}_1 & \subseteq & G_2 & \subseteq & \widetilde{E}_2 & \subseteq & G_3 & \subseteq & \widetilde{E}_3 & \subseteq & \cdots
\end{array}$$

og så $\lim \kappa(\widetilde{E}_n) < t$.

Bevis. Beviserne i de to tilfælde forløber analogt og vi beviser derfor kun (i) (alternativt kan man generalisere udsagnene, så κ kan have værdier i $\bar{\mathbb{R}}$ og så udlede (ii) af (i) ved at gå over til $\operatorname{co}\mathcal{E}$ og mængdefunktionen $D \curvearrowright -\kappa(\complement D)$; $D \in \operatorname{co}\mathcal{E}$). Bemærk i øvrigt, at udsagnet i (ii) er tomt, hvis $\lim \kappa(E_n) = \infty$.

(i): Vi overlader det til læseren at reducere undersøgelsen til tilfældet hvor $\lim \kappa(E_n) < \infty$. Lad os blot antage $\kappa(E_1) < \infty$. Til $\varepsilon > 0$ skal vi så finde mængder (K_n) og $(\widetilde{E}_n)$ med den angivne struktur, så $\lim \kappa(\widetilde{E}_n) \geq \lim \kappa(E_n) - \varepsilon$. Sæt $\varepsilon_n = \varepsilon 2^{-n}$ og konstruer $(K_n, \widetilde{E}_n)_{n\geq 1}$ rekursivt ved, for $n \geq 1$ at kræve

$$\widetilde{E}_n \subseteq K_n \subseteq \widetilde{E}_{n-1} \cap E_n \ \wedge \ \kappa(\widetilde{E}_n) \geq \kappa(\widetilde{E}_{n-1} \cap E_n) - \varepsilon_n$$

(med $\widetilde{E}_0 = X$). Vi påstår, at for $n \geq 1$ vil

$$\kappa(\widetilde{E}_n) \geq \kappa(E_n) - \sum_1^n \varepsilon_\nu. \tag{4.12}$$

Dette er klart for $n = 1$. Antag (4.12) gælder for én værdi af n. Da $E_n \supseteq \widetilde{E}_n \cup E_{n+1}$ finder vi, at

$$\begin{aligned} \kappa(E_n) + \kappa(\widetilde{E}_n \cap E_{n+1}) &\geq \kappa(\widetilde{E}_n \cup E_{n+1}) + \kappa(\widetilde{E}_n \cap E_{n+1}) \\ &\geq \kappa(\widetilde{E}_n) + \kappa(E_{n+1}). \end{aligned}$$

Konstruktionen og vores induktionsantagelse viser så, at

$$\left(\kappa(\widetilde{E}_n) + \sum_1^n \varepsilon_\nu\right) + \left(\kappa(\widetilde{E}_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}\right) \geq \kappa(\widetilde{E}_n) + \kappa(E_{n+1})$$

og vi ser, at (4.12) gælder med n erstattet af $n+1$. Ved induktion følger nu, at (4.12) gælder for alle $n \geq 1$ og vi ser, at $\lim \kappa(\widetilde{E}_n) \geq \lim \kappa(E_n) - \varepsilon$, som ønsket. □

Sætning 4.6.2 (Frembringelse af indre/ydre indhold/mål) *Lad $\kappa = (X, \mathcal{E}, \kappa)$ være en ikke-negativ mængdefunktion så $\emptyset \in \mathcal{E}$ og $\kappa(\emptyset) = 0$. Så gælder:*

(i) *Mængdefunktionen $\kappa_* : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ defineret ved*

$$\kappa_*(A) = \sup\left\{\sum_{i\in I} \kappa(E_i) \mid \sum_{i\in I} E_i \subseteq A\right\} \ ; \ A \subseteq X \tag{4.13}$$

er et indre indhold, som dominerer κ (dvs. $\kappa_* \geq \kappa$ på $\mathcal{E}$) og κ_* kan karakteriseres som det mindste indre indhold, der dominerer κ. Er κ et mål, er κ_* et supermodulært indre mål, som udvider κ og i dette tilfælde gælder

$$\kappa_*(A) = \sup\{\kappa(E) \mid E \subseteq A\} \ ; \ A \subseteq X \tag{4.14}$$

(ii) Mængdefunktionen $\kappa^* : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ defineret ved

$$\kappa^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \kappa(E_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}\ ;\ A \subseteq X \tag{4.15}$$

er da et ydre mål som er domineret af κ^* (dvs. $\kappa^* \le \kappa$ på $\mathcal{E}$) og κ^* kan karakteriseres som det største ydre mål, der er domineret af κ. Er κ et mål, er κ^* et submodulært, venstre kontinuert ydre mål og κ^* er givet ved

$$\kappa^*(A) = \inf\{\kappa(E) \mid E \supseteq A\}\,;\ A \subseteq X \tag{4.16}$$

Bemærkninger. (4.13) er en gentagelse af Definition 4.1.2.

Igen er der en vis asymmetri mellem indre og ydre størrelser. I (ii) kunne vi også have set på en variant af (4.15), hvor der kun betragtes endelige overdækninger; så ville vi have fået et ydre indhold. Denne konstruktion er imidlertid ikke så vigtig.

Konstruktionen (4.13) optræder i forskellige sammenhænge. Vi støder på den igen i Kapitel VII.

I alle udtryk (4.13–16) er det underforstået, at optrædende E-mængder antages at tilhøre $\mathcal{E}$.

Bevis. (i): Klart, at κ_* er et indre indhold som dominerer κ. Gælder dette også for φ, må $\varphi(A) \ge \varphi(\sum_1^n E_k) \ge \sum_1^n \varphi(E_k) \ge \sum_1^n \kappa(E_n)$ for $\sum_1^n E_k \subseteq A$. Heraf følger $\rho \ge \kappa_*$. Er κ et mål, må (4.14) gælde, hvorfor κ_* er en udvidelse af κ. Af (4.14) ses, at κ_* er supermodulær. Da $\mathcal{E}$ er en indre approksimerende brolægning for κ_*, ses af Sætning 1, at κ_* er højre kontinuert. Dermed må κ være et indre mål.

(ii): Dette bevises på analog måde. Sætning 1 udnyttes til at slutte, at κ^* er venstre kontinuert. □

Vi går nu over til at bevise et hovedresultat om konstruktion af mål. Vi vælger her som udgangspunkt en mængdefunktion der er overalt defineret på den relevante potensmængde. Følgende definition er central:

Definition 4.6.3 (Carathéodory) Lad $\kappa : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ være en overalt defineret mængdefunktion. En mængde $A \subseteq X$ siges at *splitte* mængden $T \subseteq X$ m.h.t. κ (eller at *κ-splitte* T eller blot at *splitte* T) såfremt

$$\kappa(T) = \kappa(T \cap A) + \kappa(T \setminus A). \tag{4.17}$$

En mængde $A \subseteq X$ er *κ-målelig,* såfremt A κ-splitter enhver delmængde T af X. Brolægningen af alle κ-målelige mængder betegnes $\mathfrak{M}_\kappa$:

$$\mathfrak{M}_\kappa = \{A \subseteq X \mid \forall T \subseteq X : \kappa(T) = \kappa(T \cap A) + \kappa(T \setminus A)\}\,.$$

Hvis det om en familie $(A_i)_{i\in I}$ af delmængder af X gælder, at der findes en familie $(\widetilde{A}_i)_{i\in I}$ af parvis disjunkte κ-målelige mængder, så $A_i \subseteq \widetilde{A}_i, i \in I$, siger vi, at familien $(A_i)_{i\in I}$ kan *skilles af κ-målelige mængder.*

Restriktionen af κ til $\mathfrak{M}_\kappa$ kaldes *Carathéodory restriktionen* af κ.

Mængden T i (4.17) kan vi tænke på som en "testmængde". Hvis hver test, vi kan udføre, giver positivt resultat (dvs. (4.17) gælder for alle $T \subseteq X$), er A κ-målelig.

Bemærk, at A er κ-målelig, hvis og kun hvis det for ethvert par af mængder $T, S \subseteq X$ med $T \subseteq A$ og $S \subseteq \complement A$ gælder, at $\kappa(T \cup S) = \kappa(T) + \kappa(S)$.

Sætning 4.6.3 (Splittelemmaet – basis for konstruktion af mål) *Lad $\kappa : \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ være en overalt defineret mængdefunktion med $\kappa(\emptyset) = 0$ og lad μ være Carathéodory restriktionen af κ. Så gælder:*

(i). *$\mathfrak{M}_\kappa$ er en algebra,*

(ii). $A \in \mathfrak{M}_\kappa \Rightarrow \forall B \subseteq X : \kappa(A \cup B) + \kappa(A \cap B) = \kappa(A) + \kappa(B)$,

(iii). *$A_1, \cdots, A_n$ kan skilles af κ-målelige mængder $\Rightarrow \kappa(\bigcup_1^n A_k) = \sum_1^n \kappa(A_k)$,*

(iv). *$\mu = (X, \mathfrak{M}_\kappa, \mu)$ er et endeligt additivt mål,*

(v). *Er κ monoton, er μ fuldstændig,*

(vi). *Hvis følgende fire betingelser er opfyldt:*

a) *κ er monoton,*

b) $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{M}_\kappa \;\wedge\; A_n \uparrow A \Rightarrow \forall T \subseteq X : \kappa(T \cap A_n) \to \kappa(T \cap A)$,

c) $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathfrak{M}_\kappa \;\wedge\; A_n \downarrow A \Rightarrow \forall \kappa(T) < \infty : \kappa(T \cap A_n) \to \kappa(T \cap A)$,

d) *κ er endeligt funderet eller $\forall A, B : \kappa(A \cup B) = \infty \Rightarrow \kappa(A) = \infty \vee \kappa(B) = \infty$,*

så er μ et mål, $\mu_* \leq \kappa \leq \mu^*$ og for enhver følge $(A_n)_{n \geq 1}$ af mængder, der kan skilles med κ-målelige mængder gælder $\kappa(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \kappa(A_n)$.

Bevis. (i): Lad $A, B \in \mathfrak{M}_\kappa$. Udnyt, for $T \subseteq X$, at A splitter T og at B splitter både $T \cap A$ og $T \setminus A$ til at slutte

$$\begin{aligned}
\kappa(T) &= \kappa(T \cap A \cap B) + \kappa(T \cap A \setminus B) + \kappa((T \setminus A) \cap B) + \kappa(T \setminus A \setminus B) \\
&= \kappa(T \cap (A \cup B)) + \kappa(T \setminus (A \cup B)).
\end{aligned}$$

Her udledes anden lighed af første, anvendt med T erstattet af $T \cap (A \cup B)$ (her får vi brug for forudsætningen $\kappa(\emptyset) = 0$). Vi ser nu, at $\mathfrak{M}_\kappa$ er $(\cup f, \complement)$-lukket, altså en algebra.

(ii): Udnytter vi, at A splitter både $A \cup B$ og B, fås

$$\kappa(A \cup B) + \kappa(A \cap B) = \kappa(A) + \kappa(B \setminus A) + \kappa(A \cap B) = \kappa(A) + \kappa(B).$$

(iii): Ifølge definitionen, er dette rigtigt for $n = 2$. Den generelle gyldighed af (iii) vises så let ved induktion.

(iv): Nu trivielt!

(v): Lad $E \subseteq X$ være givet, så der for $\varepsilon > 0$ findes $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathfrak{M}_\kappa$, så $A_\varepsilon \subseteq E \subseteq B_\varepsilon$ og $\mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$. For en testmængde T, og et $\varepsilon > 0$, finder vi nu, bl.a. under udnyttelse af (ii), at

$$\begin{aligned}\kappa(T) &= \kappa(T \cap A_\varepsilon) + \kappa(T \setminus A_\varepsilon) \le \kappa(T \cap E) + \kappa((T \setminus E) \cup (B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon)) \\ &\le \kappa(T \cap E) + \kappa(T \setminus E) + \kappa(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \le \kappa(T \cap E) + \kappa(T \setminus E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Så $\kappa(T) \le \kappa(T \wedge E) + \kappa(T \setminus E)$. Den modsatte ulighed vises analogt. Vi kan nu slutte det ønskede, at $E \in \mathfrak{M}_\kappa$.

(vi): Antag, at a), b), c) og d) er opfyldt. Vi viser først, at hvis $(A_n)_{n\ge1}$ kan skilles af de κ-målelige mængder $(\widetilde{A}_n)_{n\ge1}$, vil $\kappa(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \kappa(A_n)$. Hertil ses på mængden $T = \bigcup_1^\infty A_n$. Af b) fås så, da $\bigcup_1^N \widetilde{A}_n \uparrow \bigcup_1^\infty \widetilde{A}_n$, at $\kappa(\bigcup_1^N A_n) \to \kappa(\bigcup_1^\infty A_n)$. Det ønskede følger så af (iii).

Vi viser dernæst, at $\mathfrak{M}_\kappa$ er en σ-algebra.

Da $\mathfrak{M}_\kappa$ er vist at være en algebra, er det nok at vise, at $\mathfrak{M}_\kappa$ er $(\cup c)$-lukket. Antag derfor $A_n \uparrow A$, hvor $(A_n)_{n\ge1} \subseteq \mathfrak{M}_\kappa$. Ser vi på en testmængde T med $\kappa(T) < \infty$, finder vi af b) og c), at

$$\kappa(T) = \kappa(T \cap A_n) + \kappa(T \setminus A_n) \to \kappa(T \cap A) + \kappa(T \setminus A_n)$$

og vi slutter, at A splitter T. Ræsonnementet viser også, uanset $\kappa(T)$ er endelig eller ej, at for alle $T_0 \subseteq T$ med $\kappa(T_0) < \infty$, vil $\kappa(T_0) \le \kappa(T \cap A) + \kappa(T \setminus A)$. Nu er det klart, at A splitter T, også hvis $\kappa(T) = \infty$ (og uanset den ene, eller den anden betingelse i d) gælder).

Ud fra det viste, kan vi nu slutte, at $\mu = (X, \mathfrak{M}_\kappa, \mu)$ er et mål. Endelig følger ulighederne $\mu_* \le \kappa \le \mu^*$ let af (4.14) og (4.16). □

Korollar 4.6.1 (konstruktion af mål via indre eller ydre mål) *Hvis $\kappa = (X, \mathcal{P}(X), \kappa)$ enten er et endeligt funderet indre mål eller et ydre mål, er $\mu = \kappa \mid \mathfrak{M}_\kappa$ et mål.*

Bevis. Vi skal eftervise a), b), c) og d) fra Sætning 3, (vi). Betingelserne a) og d) volder ingen problemer.

Lad os først antage, at κ er et endeligt funderet indre mål. Så følger c) direkte af definitionen på indre mål. Antag, for at vise b), at $(A_n)_{n\ge1} \subseteq \mathfrak{M}_\kappa$ og $A_n \uparrow A$. Lad T være en testmængde. Hvis $\kappa(T \cap A) < \infty$, kan vi af

$$\kappa(T \cap A) = \kappa(T \cap A_n) + \kappa(T \cap A \setminus A_n)$$

og af højre-kontinuiteten af κ slutte, at $\kappa(T \cap A_n) \to \kappa(T \cap A)$. Den samme konklusion kan vi imidlertid også nå til, hvis $\kappa(T \cap A) = \infty$ ved at udnytte, at κ er endeligt funderet (til K, vælg $T' \subseteq T \cap A$ med $\kappa(T') \ge K$ og $\kappa(T') < \infty$; så vil $\lim \kappa(T \cap A_n) \ge \lim \kappa(T' \cap A_n) = \kappa(T' \cap A) \ge K$).

Dernæst ser vi på tilfældet, hvor κ er et ydre mål. For at vise b) antages igen, at $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{M}_\kappa$ og $A_n \uparrow A$. Sæt $D_n = A_n \setminus A_{n-1}; n \geq 1$ (med $A_0 = \emptyset$). Lad T være en testmængde. Da mængderne $T \cap D_n; n \geq 1$ kan skilles af de κ-målelige mængder $D_n; n \geq 1$, finder vi

$$\begin{aligned}
\kappa(T \cap A) &= \kappa(\bigcup_1^\infty (T \cap D_n)) \leq \sum_1^\infty \kappa(T \cap D_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_1^N \kappa(T \cap D_n) = \lim_{N\to\infty} \kappa(T \cap A_N)
\end{aligned}$$

og vi slutter, at $\kappa(T \cap A_N) \to \kappa(T \cap A)$, som ønsket.

For at vise c), antages $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{M}_\kappa$ med $A_n \downarrow A$. For en testmængde T finder vi af den allerede viste egenskab b), at

$$\begin{aligned}
\kappa(T \cap A_1) &= \kappa(T \cap A_n) + \kappa(T \cap A_1 \setminus A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \kappa(T \cap A_n) + \kappa(T \cap A_1 \setminus A).
\end{aligned}$$

Da $\kappa(T \cap A_1) \leq \kappa(T \cap A) + \kappa(T \cap A_1 \setminus A)$, slutter vi heraf, at såfremt $\kappa(T) < \infty$, vil $\lim \kappa(T \cap A_n) \leq \kappa(T \cap A)$. Der må så gælde lighed i denne ulighed, og c) er bevist. $\square$

De to sætninger, vi har vist om konstruktion af mål (Sætning 3 og Korollar 1)) tager udgangspunkt i mængdefunktioner defineret på hele $\mathcal{P}(X)$. Vi vil nu vælge et mere beskedent – og realistisk – udgangspunkt, typisk mængdefunktioner på brolægninger, der er $(\cup f, \cap f)$-lukkede, $(\cup f, \cap c)$-lukkede el.lign. Vi kan stort set vælge at gå i to retninger, enten den, der sigter på indre mål eller den, der sigter på ydre mål, jvf. ovenstående korollar. Vi vælger at fokusere på de indre mål.

Lad os se nærmere på stramme indhold på $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukkede brolægninger $\mathcal{K}$. Vi vælger med vilje bogstavet "k" for disse brolægninger, da det støtter intuitionen at tænke på brolægningen $\mathcal{K}$ som en brolægning af abstrakte "kompakte" mængder; en hovedanvendelse er netop til brolægningen af kompakte mængder i et topologisk rum.

Sætning 4.6.4 [2] *En mængdefunktion $\lambda = (X, \mathcal{K}, \lambda)$ på den $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{K}$ er stram, hvis og kun hvis $\lambda : \mathcal{K} \to [0, \infty[$ opfylder*

$$\forall K_1 \subseteq K_2 : \lambda(K_1) + \sup_{K \subseteq K_2 \setminus K_1} \lambda(K) = \lambda(K_2) \tag{4.18}$$

og i så fald er λ_* givet ved

$$\lambda_*(A) = \sup_{K \subseteq A} \lambda(K)\,; \quad A \subseteq X, \tag{4.19}$$

specielt er λ_* en udvidelse af λ.

[2] Fra nu af vedtager vi, at såfremt det ikke kan give anledning til misforståelser, er mængder betegnet med et bogstav K automatisk antaget at tilhøre brolægningen $\mathcal{K}$.

Bevis. Vi minder om definitionen på stramhed i §1 (Definition 4.1.4).

Antag først, at $\lambda : \mathcal{K} \to [0,\infty[$ opfylder (4.18). Heraf følger direkte, at $\lambda(\emptyset) = 0$ og at λ er monoton og ved at udnytte (4.18) på de to situationer $K_1 \subseteq K_1 \cup K_2$ og $K_1 \cap K_2 \subseteq K_2$ ses, at λ er modulær. Specielt er λ så additiv og dermed endeligt additiv. Så følger uligheden "$\leq$" i (4.19). Den modsatte ulighed er triviel. Dermed er (4.19) bevist. Så kan vi skrive (4.18) på formen $\lambda(K_1) + \lambda_*(K_2 \setminus K_1) = \lambda(K_2)$ og vi ser, at kravet til stramhed (4.4) er opfyldt.

Antag dernæst, at λ er stram. Så er $\lambda(\emptyset) = 0$ og for $K \in \mathcal{K}$ er $\lambda(K) = \lambda(K \setminus \emptyset) = \lambda_*(K) - \lambda(\emptyset) = \lambda_*(K)$. Specielt er λ superadditiv og (4.19) følger. Betingelsen (4.4) for stramhed kan så skrives på formen (4.18). $\square$

Vores mål er at udvide mængdefunktioner som λ fra sætningen til endeligt additive og til egentlige, numerabelt additive mål. Dette sker ved at se på en restriktion af λ_* under udnyttelse af Korollar 1. Af (4.19) ses, at dette automatisk fører til mål med pæne indre approksimerende brolægninger, specielt brolægninger af målelige mængder. Man taler så om regularitet:

Definition 4.6.4 (regulære mængdefunktioner) Lad $\kappa = (X, \mathcal{E}, \kappa)$ være en ikke-negativ, udvidet reel mængdefunktion på en $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket brolægning $\mathcal{E}$, så $\kappa(\emptyset) = 0$. Lad $\mathcal{K}$ og $\mathcal{G}$ være brolægninger på X. Vi siger, at κ er $\mathcal{K}$-*indre regulær* eller *indre regulær m.h.t.* $\mathcal{K}$ såfremt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}$ og

$$\forall E \in \mathcal{E} : \kappa(E) = \sup_{K \subseteq E} \kappa(K) \tag{4.20}$$

(underforstået er her, at $K \in \mathcal{K}$). Vi siger, at κ er $\mathcal{G}$-*ydre regulær* eller *ydre regulær m.h.t.* $\mathcal{G}$, såfremt

$$\forall E \in \mathcal{E} : \kappa(E) = \inf_{G \supseteq E} \kappa(G) \tag{4.21}$$

(underforstået er her, at $G \in \mathcal{G}$). Såfremt såvel (4.20) som (4.21) gælder, siger vi, at κ er $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$-*regulær* eller *regulær m.h.t.* $(\mathcal{K}, \mathcal{G})$.

Bogstavet "g" er valgt i forbindelse med $\mathcal{G}$ for at give mindelser om "Gebiet", altså åbne mængder i et topologisk rum. I den abstrakte teori går vi ud fra en brolægning $\mathcal{K}$ af "kompakte" mængder. Ud fra den definerer vi både "lukkede" og "åbne mængder":

Definition 4.6.5 (abstrakte "lukkede" og "åbne" mængder) Lad $\mathcal{K}$ være en brolægning på X. Brolægningen $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ af $\mathcal{K}$-*lukkede mængder* og brolægningen $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ af $\mathcal{K}$-*åbne mængder* defineres ved

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{K}) &= \{F \subseteq X \mid \forall K \in \mathcal{K} : K \cap F \in \mathcal{K}\} && (4.22) \\ \mathcal{G}(\mathcal{K}) &= \{G \subseteq X \mid \forall K \in \mathcal{K} : K \setminus G \in \mathcal{K}\}\,. && (4.23) \end{aligned}$$

Desuden defineres $\mathcal{A}(\mathcal{K})$, brolægningen af $\mathcal{K}$-*algebra mængder,* og $\mathcal{B}(\mathcal{K})$, brolægningen af $\mathcal{K}$-*Borelmængder* ved

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \alpha(\mathcal{F}(\mathcal{K})) = \alpha(\mathcal{G}(\mathcal{K}))\,, \tag{4.24}$$
$$\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{F}(\mathcal{K})) = \sigma(\mathcal{G}(\mathcal{K}))\,. \tag{4.25}$$

Sætning 4.6.5 *$\mathcal{F}(\mathcal{K})$ og $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ er komplementære brolægninger: $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \operatorname{co}\mathcal{F}(\mathcal{K})$, $\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \operatorname{co}\mathcal{G}(\mathcal{K})$. Hvis $\mathcal{K}$ er $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket, er $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ og $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ begge $(\emptyset, X, \cup f, \cap f)$-lukkede og $\mathcal{F}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{K}$, $\mathcal{G}(\mathcal{K}) \supseteq \operatorname{co}\mathcal{K}$. Er $\mathcal{K}(\emptyset, \cup f, \cap c)$-lukket, er $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ $(\emptyset, X, \cup f, \cap c)$-lukket og $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ er $(\emptyset, X, \cup c, \cap f)$-lukket. Er $\mathcal{K}$ $(\emptyset, \cup f, \cap a)$-lukket, er $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ $(\emptyset, X, \cup f, \cap a)$-lukket og $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ $(\emptyset, X, \cup a, \cap f)$-lukket, dvs. $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ er brolægningen af lukkede og $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ brolægningen af åbne delmængder for en topologi.*

Er X et metriserbart topologisk rum, og er $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$, er $\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \mathcal{F}(X)$, $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}(X)$ og $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X)$.

Bevis. Første del er triviel. Antag nu $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$, hvor X er metriserbar. Det er klart (se Appendix 1.10 eller Berg 1997'), at $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{K})$ og $\mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{K})$ (dette bygger ikke på metriserbarhed og gælder et vilkårligt Hausdorffrum). Antag nu $F \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$. Da X er metriserbar, er det nok at vise, at F er "følgelukket" for at slutte, at F er lukket. Antag defor $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq F$ og $x_n \to x$. Sæt $K = \{x_n \mid n \geq 1\} \cup \{x\}$. Så er $K \cap F$ kompakt, specielt lukket. Vi slutter $x \in K \cap F$, specielt $x \in F$. Dermed har vi indset, at F er lukket og $\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \mathcal{F}(X)$ er bevist. Så er $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \operatorname{co}\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \operatorname{co}\mathcal{F}(\mathrm{X}) = \mathcal{G}(\mathrm{X})$ og $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X)$. □

Som sagt er stramme mængdefunktioner udgangspunktet for konstruktionen af mål. At dette program lykkes, skyldes en række pæne egenskaber for disse mængdefunktioner:

Sætning 4.6.6 (stramme mængdefunktioner) *Lad $\lambda : \mathcal{K} \to [0, \infty[$ være stram på den $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{K}$. Lad λ_* være det af λ inducerede indre indhold og lad $\mathfrak{M}$ være brolægningen af λ_*-målelige mængder. Der gælder da:*

(i) *λ er et modulært indhold,*

(ii) *For enhver delmængde $A \subseteq X$, gælder, at $A \in \mathfrak{M}$, hvis og kun hvis*

$$\forall K \in \mathcal{K} : \lambda_*(K) \leq \lambda_*(K \cap A) + \lambda_*(K \setminus A), \tag{4.26}$$

(iii) *Hvis $X_0 \in \mathfrak{M}$ og $\lambda_*(X_0) < \infty$, så er enhver delmængde A af X_0 for hvilken*

$$\lambda_*(X_0) \leq \lambda_*(A) + \lambda_*(X_0 \setminus A) \tag{4.27}$$

λ_*-målelig.

(iv) *Mængderne i $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ og $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ er alle λ_*-målelige, og dermed vil $\mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{M}$,*

(v) *Hvis λ er σ-kontinuert fra højre i $\emptyset$, er λ σ-kontinuert fra højre og, mere generelt, gælder i så fald, at $\lambda_* \mid \mathcal{F}(\mathcal{K})$ er σ-kontinuert fra højre og $\lambda_* \mid \mathcal{G}(\mathcal{K})$ er σ-kontinuert fra venstre,*

(vi) *Antag nu, at λ er τ-kontinuert fra højre i $\emptyset$. Så gælder egenskaberne fra* (v) *men med "τ" i stedet for "σ". Mere generelt gælder følgende implikationer:*

$$\begin{aligned}&(F_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{K}) \ \wedge\ F_i \downarrow F \ \wedge\ F \in \mathcal{F}(\mathcal{K}) \ \wedge\ \exists i_0 \in I : \lambda_*(F_{i_0}) < \infty \\ &\Rightarrow \forall T \subseteq X : \lambda_*(T \cap F_i) \downarrow \lambda_*(T \cap F),\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$(G_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{K}) \ \wedge\ G_i \uparrow G \ \wedge\ G \in \mathcal{G}(\mathcal{K}) \Rightarrow \forall T \subseteq X : \lambda_*(T \cap G_i) \uparrow \lambda_*(T \cap G) \tag{4.29}$$

Bevis. (i) viste vi under beviset for Sætning 6.

(ii): Hvis $A \in \mathfrak{M}$, gælder (4.26) i henhold til definitionen af $\mathfrak{M}$. Omvendt, gælder (4.26) vil, for $T \subseteq X$,

$$\lambda_*(T) = \sup_{K\subseteq T} \lambda_*(K) \leq \sup_{K\subseteq T} (\lambda_*(K \cap A) + \lambda_*(K \setminus A)) \leq \lambda_*(T \cap A) + \lambda_*(T \setminus A)$$

og da den modsatte ulighed er triviel, følger det, at $A \in \mathfrak{M}$.

(iv): Antag $F \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$. For $K \in \mathcal{K}$ har vi så $\lambda_*(K) = \lambda(K) = \lambda(K \cap F) + \lambda_*(K \setminus F) = \lambda_*(K \cap F) + \lambda_*(K \setminus F)$. Af (ii) følger så, at $\mathcal{F}(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{M}$. Så vil også $\mathcal{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{M}$.

(iii): Lad os nøjes med at vise det i tilfældet $X_0 = X$. Antag altså $\lambda_*(X) \leq \lambda_*(A) + \lambda_*(\complement A)$. Så gælder der lighedstegn her. Lad $B \in \mathfrak{M}$. Udnyttes, at B splitter X, A og $\complement A$, fås

$$\lambda_*(B) + \lambda_*(\complement B) = \lambda_*(A \cap B) + \lambda_*(A \setminus B) + \lambda_*(\complement A \cap B) + \lambda_*(\complement A \setminus B)$$

eller

$$0 = \left[\lambda_*(B) - \lambda_*(A \cap B) - \lambda_*(\complement A \cap B)\right] + \left[\lambda_*(\complement B) - \lambda_*(A \setminus B) - \lambda_*(\complement A \setminus B)\right].$$

Da begge $[\cdots]$-parenteser her er ≥ 0, må de begge være 0. Altså vil $\lambda_*(B) = \lambda_*(B \cap A) + \lambda_*(B \setminus A)$. Anvend dette med $B = K \in \mathcal{K}$ (tilladt da $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{M}$). Af (ii) følger nu $A \in \mathfrak{M}$.

(v), (vi): Disse egenskaber vises (nogenlunde) analogt. Vi nøjes med at vise (vi) og antager derfor, at λ er τ-kontinuert fra højre i $\emptyset$.

Ved beviset kan vi udnytte, at $\lambda_*|\mathfrak{M}$ er et endeligt additivt mål og at $\mathfrak{M} \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{K})$. Antag nu præmisserne fra (4.28) er opfyldt (F_i'er og $F \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$, $F_i \downarrow F$, $\lambda_*(F_{i_0}) < \infty$). Vælg $K \subseteq F_{i_0} \setminus F$ så $\lambda(K) \approx \lambda_*(F_{i_0} \setminus F)$. Så vil $\lambda_*(F_{i_0} \setminus F \setminus K) \approx 0$. Så er

$$\begin{aligned}\lambda_*(F_i) &\leq \lambda_*\left(F \cup (F_i \cap K) \cup (F_{i_0} \setminus F \setminus K)\right) \\ &\leq \lambda_*(F) + \text{ lille } \varepsilon.\end{aligned}$$

Dette viser, at $\lambda_*(F_i) \to \lambda_*(F)$. Se nu på en mængde $T \subseteq X$. Ifølge det ovenstående kan i vælges, så $\lambda_*(F_i) \approx \lambda_*(F)$. Så er

$$\begin{aligned}\lambda_*(T \cap F_i) &\leq \lambda_*\left((T \cap F) \cup (F_i \setminus F)\right) = \lambda_*(T \cap F) + \lambda_*(F_i \setminus F) \\ &= \lambda_*(T \cap F) + \lambda_*(F_i) - \lambda_*(F) \approx \lambda_*(T \cap F)\end{aligned}$$

og vi slutter, at (4.28) gælder.

For at vise (4.29), antages $G_i \uparrow G$ med G_i'er og G i $\mathcal{G}(\mathcal{K})$. Til $K \subseteq T \cap G$ findes i så $\lambda(K \setminus G_i) \approx 0$. Så vil

$$\lambda_*(T \cap G_i) \geq \lambda_*(K \cap G_i) = \lambda_*(K) - \lambda_*(K \setminus G_i) \approx \lambda(K).$$

Da dette ræsonnement kan gennemføres for alle $K \subseteq T \cap G$, må $\sup\{\lambda_*(T \cap G_i) \mid i \in I\} \geq \lambda_*(T \cap G)$. $\square$

Vi kan nu formulere et hovedresultat:

Sætning 4.6.7 (hovedsætning af type I om udvidelse af stramme mængdefunktioner til mål) *Lad $\lambda = (X, \mathcal{K}, \lambda)$ være et stramt indhold på brolægningen $\mathcal{K}$, betegn som sædvanlig med λ_* det indre indhold induceret af λ og lad μ betegne restriktionen af λ_* til de λ_*-målelige mængder. Da gælder:*

(i). *Er $\mathcal{K}$ $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket, er μ en udvidelse af λ til et $\mathcal{K}$-indre regulært, endeligt additivt mål, og μ kan karakteriseres som det største sådanne.*

(ii). *Er $\mathcal{K}$ $(\emptyset, \cup f, \cap c)$-lukket og er λ σ-kontinuert fra højre i $\emptyset$, er μ en udvidelse af λ til et $\mathcal{K}$-indre regulært (numerabelt additivt) mål.*

(iii). *Er $\mathcal{K}$ $(\emptyset, \cup f, \cap a)$-lukket og er λ τ-kontinuert fra højre i $\emptyset$, er μ en udvidelse af λ til et $\mathcal{K}$-indre regulært mål så $\mu \mid \mathcal{F}(\mathcal{K})$ er τ-kontinuert fra højre og $\mu \mid \mathcal{G}(\mathcal{K})$ er τ-kontinuert fra venstre.*

Bevis. Med de gjorte forberedelser ganske let. Udnyt især sætningerne 3 og 6. $\square$

Korollar 4.6.2 *Et stramt indhold λ på en semikompakt $(\emptyset, \cup f, \cap c)$-lukket brolægning $\mathcal{K}$, har en udvidelse til et $\mathcal{K}$-indre regulært mål på $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.*

Et stramt indhold λ på en kompakt $(\emptyset, \cup f, \cap a)$-lukket brolægning, har en udvidelse til et $\mathcal{K}$-indre regulært mål μ på $\mathcal{B}(\mathcal{K})$, så $\mu|\mathcal{F}(\mathcal{K})$ er τ-kontinuert fra højre.

Vi skal ikke her komme ind på ydre-regularitet af de konstruerede mål udover den trivielle bemærkning, at hvis $\mu(X) < \infty$ (dvs. $\sup\{\lambda(K) \mid K \in \mathcal{K}\} < \infty$), så vil μ være $\mathcal{G}(\mathcal{K})$-ydre regulær (endog co $\mathcal{K}$-ydre regulær).

I nogle vigtige sammenhænge har et stramt indhold kontinuitetsegenskaber, men definitionsbrolægningen er måske kun lukket overfor operationerne $(\cup f, \cap f)$. Vi kan så ikke umiddelbart anvende en type I udvidelsessætning. Der gælder pæne resultater i denne situation. Vi må blot arbejde lidt mere på at bevise dem.

Definition 4.6.6 Lad $\lambda_0 = (X, \mathcal{K}_0, \lambda_0)$ være et indhold på den $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{K}_0$. Ved *σ-udvidelsen af* λ_0 forstås $\lambda_\sigma = (X, \mathcal{K}_\sigma, \lambda_\sigma)$ givet ved $\mathcal{K}_\sigma = (\cap c)$-afslutningen af $\mathcal{K}_0$ og $\lambda_\sigma(K) = \inf\{\lambda_0(K_0) \mid K_0 \supseteq K\}$; $K \in \mathcal{K}_\sigma$. Ved *τ-udvidelsen af* λ_0 forstås $\lambda_\tau = (X, \mathcal{K}_\tau, \lambda_\tau)$ givet ved $\mathcal{K}_\tau = (\cap a)$-afslutningen af $\mathcal{K}_0$ og $\lambda_\tau(K) = \inf\{\lambda_0(K_0) \mid K_0 \subseteq K\}$; $K \in \mathcal{K}_\tau$.

Bemærk, at her er $\mathcal{K}_\sigma = (\emptyset, \cup f, \cap c)$-afslutningen af $\mathcal{K}_0$ og $\mathcal{K}_\tau = (\emptyset, \cup f, \cap a)$-afslutningen af $\mathcal{K}_0$ (jvf. Appendix I, (1.18)).

Sætning 4.6.8 *Lad $\lambda_0 = (X, \mathcal{K}_0, \lambda_0)$ være et stramt indhold på den $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{K}_0$. Antag, enten at λ_0 er σ-kontinuert eller at λ_0 er τ-kontinuert fra højre. Sæt $\lambda = (X, \mathcal{K}, \lambda)$ lig med σ-udvidelsen af λ_0 i første tilfælde og lig med τ-udvidelsen af λ_0 i andet tilfælde. Da er λ et stramt indhold som udvider λ_0, og λ er σ-kontinuert fra højre i første og τ-kontinuert fra højre i andet tilfælde. I begge tilfælde gælder $\mathcal{F}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{K}_0)$ og dermed $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$.*

Bevis. Beviserne er analoge i de to tilfælde. Lad os f.eks. antage, at λ_0 er τ-kontinuert fra højre. Med vedføjede 0'er betegnes mængder i $\mathcal{K}_0$. Vi fører beviset i følgende skridt

(a) $K_{i0} \downarrow K \Rightarrow \lambda_0(K_{i0}) \to \lambda(K)$

(b) λ er modulær

(c) λ er τ-kontinuert fra højre

(d) λ er stram

(e) $\mathcal{F}(\mathcal{K}) \supseteq \mathcal{F}(\mathcal{K}_0)$.

(a): Vælg $K_0 \supseteq K$, så $\lambda(K) \approx \lambda_0(K_0)$. Vælg i, så $\lambda_0(K_{i0} \cup K_0) \approx \lambda_0(K_0)$. Så vil $\lambda_0(K_{i0}) \leq \lambda_0(K_{i0} \cup K_0) \approx \lambda(K)$. Vi ser, at (a) gælder.

(b) følger af (a) og (c) er let.

(d): Antag $K_1 \subseteq K_2$. Vælg $K_{10} \supseteq K_1$, så $\lambda(K_1) \approx \lambda_0(K_{10})$. Vælg $K_{20} \supseteq K_{10} \cup K_2$ vilkårlig. Vælg $K_0 \subseteq K_{20} \setminus K_{10}$, så $\lambda_0(K_0) \approx \lambda_0(K_{20}) - \lambda_0(K_{10})$. Sæt $K = K_0 \cap K_2$. Vi har:

$$\begin{aligned}
\lambda(K) &= \lambda(K_0 \cap K_2) = \lambda(K_0) + \lambda(K_2) - \lambda(K_0 \cup K_2) \\
&\approx \lambda(K_{20}) - \lambda(K_{10}) + \lambda(K_2) - \lambda(K_0 \cup K_2) \\
&\geq \lambda(K_2) - \lambda(K_{10}) \approx \lambda(K_2) - \lambda(K_1).
\end{aligned}$$

Heraf ses, at $\sup\{\lambda(K) \mid K \subseteq K_2 \setminus K_1\} \geq \lambda(K_2) - \lambda(K_1)$. Den modsatte ulighed følger af (b).

(e) er oplagt. $\square$

Vi kan nu vise et nyt hovedresultat; det er af en anden type end det første, fordi brolægningen $\mathcal{K}_0$ modificeres. P.gr. af en hovedanvendelse vedrørende såkaldte Bairemål, giver vi sætningen et navn, der sigter hertil.

Sætning 4.6.9 (Type II udvidelsessætning; en abstrakt Baire- til Boreludvidelsessætning) *Lad* $\lambda_0 = (X, \mathcal{K}_0, \lambda_0)$ *være et stramt indhold på den* $(\emptyset, \cup f, \cap f)$*-lukkede brolægning* $\mathcal{K}_0$. *Lad* $\mu_0 = (X, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ *være Type I-udvidelsen af* λ_0 *i henhold til Sætning 7. Det antages, enten at* λ_0 *er* σ*-kontinuert fra højre eller at* λ_0 *er* τ*-kontinuert fra højre, og vi sætter* $\lambda = (X, \mathcal{K}, \lambda)$ *lig med hhv.* σ*-udvidelsen eller* τ*-udvidelsen af* λ_0. *Lad* $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ *betegne Type I-udvidelsen af* λ *til et* $\mathcal{K}$*-indre regulært mål.*

Da er μ *en udvidelse af* μ_0 *(*$\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}_0$ *og* $\mu = \mu_0$ *på* $\mathcal{B}_0$*);* μ *er givet ved*

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subseteq A \\ K \in \mathcal{K}}} \inf_{\substack{K_0 \supseteq K \\ K_0 \in \mathcal{K}_0}} \lambda_0(K_0)\,; \quad A \in \mathcal{B} \tag{4.30}$$

Sætningens indhold resumeres i nedenstående diagram:

Bevis. Lad λ_{0*} og λ_* være de indre indhold inducerede af hhv. λ_0 og λ. I det, der følger, udnyttes bl.a. Type I-sætningen (Sætning 7) og Sætning 8. Vi fører beviset i følgende skridt:

(a) $\lambda_{0*} \leq \lambda_*$,

(b) $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$,

(c) $A \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow \lambda_{0*}(A) = \lambda_*(A)$.

Uligheden (a) følger af

$$\lambda_{0*}(A) = \sup_{K_0 \subseteq A} \lambda_0(K_0) = \sup_{K_0 \subseteq A} \lambda(K_0) \leq \sup_{K \subseteq A} \lambda(K) = \lambda_*(A).$$

Før vi går videre, kan vi bemærke, at det er let at fuldføre beviset, hvis $\lambda_{0*}(X) < \infty$ (overvej). I det generelle tilfælde kan vi gå frem som følger.

Bevis for (b): Lad $A \in \mathcal{B}_0$. Hold $K \in \mathcal{K}$ fast. Vælg $K_{i0} \downarrow K$ og sørg i σ-tilfældet for at $(K_{i0}) = (K_{i0})_{i \geq 1}$ er en aftagende følge. Vi har

$$\begin{aligned} \lambda(K) &= \inf \lambda_0(K_{i0}) = \inf(\lambda_{0*}(K_{i0} \cap A) + \lambda_{0*}(K_{i0} \setminus A)) \\ &\leq \inf(\lambda_*(K_{i0} \cap A) + \lambda_*(K_{i0} \setminus A)) \\ &= \lambda_*(K \cap A) + \lambda_*(K \setminus A) \end{aligned}$$

(se også (4.28)). Heraf følger $A \in \mathcal{B}$.

Bevis for (c): Antag $A \in \mathcal{B}_0$. Nok ifølge (a) at vise, at $\lambda_*(A) \leq \lambda_{0*}(A)$. Vi har

$$\begin{aligned}
\lambda_*(A) &= \sup_{K \subseteq A} \lambda(K) = \sup_{K \subseteq A} \inf_{K_0 \supseteq K} \lambda_0(K_0) \\
&= \sup_{K \subseteq A} \inf_{K_0 \supseteq K} (\lambda_{0*}(K_0 \cap A) + \lambda_{0*}(K_0 \setminus A)) \\
&\leq \sup_{K \subseteq A} \inf_{K_0 \supseteq K} (\lambda_{0*}(A) + \lambda_*(K_0 \setminus K)) \\
&\leq \lambda_{0*}(A) + \sup_{K} \inf_{K_0 \supseteq K} \lambda_*(K_0 \setminus K) \\
&= \lambda_{0*}(A).
\end{aligned}$$

Hermed er det ønskede vist. $\square$

Bemærkning. Formlen (4.30) gælder mere generelt, idet målet μ jo kan udvides til et fuldstændigt mål, ja videre endnu til de λ_*-målelige mængder, jvf. Sætning 7.

Som en anvendelse viser vi et klassisk resultat om udvidelse af et endeligt additivt mål.

Korollar 4.6.3 (Carathédory's udvidelsessætning) *Lad μ_0 være et endeligt additivt mål på algebraen $\mathcal{A}_0$. Antag, at μ_0 er endeligt funderet og at μ_0 er σ-kontinuert fra højre i $\emptyset$. Da har μ_0 en udvidelse til et mål μ. Vi kan opnå, at μ er $\mathcal{A}$-indre regulært, hvor $\mathcal{A}$ består af tællelige fællesmængder af mængder i $\mathcal{A}_0$.*

Bevis. Anvend Sætning 9 med $\mathcal{K}_0 = \{A \in \mathcal{A}_0 \mid \mu_0(A) < \infty\}$ og $\lambda_0 = \mu_0 \mid \mathcal{K}_0$. $\square$

Bemærkning. Det er i korollaret nok at antage, at μ_0 er defineret på en ring $\mathcal{A}_0$ (og at μ_0 er et endeligt additivt mål på denne ring, dvs. μ_0 er endeligt additiv og $\mu_0(\emptyset) = 0$). Tidligere studerede man (endeligt additive) mål på ringe og σ-ringe. Det har man nu indset, der ikke er nogen grund til (dog nødvendigt for visse udvidelser af teorien, hvor målene kan have værdier i mere generelle strukturer end $\mathbb{R}$).

Vi har stadig ikke vist det lovede resultat, Sætning 4.1.1. Det gør vi nu. Sætninger af denne type, hvor udgangspunktet blot er en $(\cap f)$-lukket brolægning, rubricerer vi som type III-sætninger. Der gælder følgende resultat, der indeholder lidt mere information end Sætning 4.1.1:

Sætning 4.6.10 (Type III hovedsætning) *Lad $\lambda = (X, \mathcal{A}, \lambda)$ være en stram mængdefunktion på den $(\emptyset, \cap f)$-lukkede brolægning $\mathcal{A}$ og antag, at λ har en semikompakt approksimerende brolægning $\mathcal{K}_0$. Da har λ en udvidelse til et mål μ på $\sigma(\mathcal{A})$, der er indre-regulært m.h.t. den semikompakte brolægning, der består af alle mængder i $\sigma(\mathcal{A})$, der ligger i $(\emptyset, \cup f, \cap c)$-afslutningen af $\mathcal{K}$.*

Bevis. Lad λ_* være det indre indhold induceret af λ. Så er λ_* en udvidelse af λ.

Lad $A \in \mathcal{A}$. Vi vil vise, at A er λ_*-målelig. Lad $T \subseteq X$. Så vil $\lambda_*(T) \geq \lambda_*(T \cap A) + \lambda_*(T \setminus A)$. For at vise den modsatte ulighed betragtes parvis disjunkte mængder $B_1, \cdots, B_n$ fra $\mathcal{A}$, alle indeholdt i T. Så er

$$\begin{aligned}\sum_1^n \lambda(B_k) &= \sum_1^n (\lambda(B_k \cap A) + \lambda_*(B_k \setminus A)) \\ &\leq \lambda_*\left(\bigcup_1^n B_k \cap A\right) + \lambda_*\left(\bigcup_1^n B_k \setminus A\right) \\ &\leq \lambda_*(T \cap A) + \lambda_*(T \setminus A).\end{aligned}$$

Vi slutter, at $\lambda_*(T) \leq \lambda_*(T \cap A) + \lambda_*(T \setminus A)$ og har dermed vist, at alle mængder i $\mathcal{A}$ er λ_*-målelige. Af splittelemmaet, Sætning 3, ses nu, at $\lambda_* \mid \alpha(\mathcal{A})$ er en udvidelse af λ til et endeligt additivt mål. Vi nøjes med at se på λ_* på $(\cup f)$-afslutningen $\mathcal{A}_1$ af $\mathcal{A}$. Sæt $\lambda_1 = \lambda_* \mid \mathcal{A}_1$. Så er $\mathcal{A}_1$ $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket og λ_1 er et stramt indhold på $\mathcal{A}_1$.

For at vise, at λ_1 kan udvides til et mål, er det i henhold til Type-II udvidelsessætningen nok at vise, at λ_1 er σ-kontinuert fra højre. Faktisk er det nok at vise, at λ_1 er σ-kontinuert fra højre i $\emptyset$ (Sætning 7 !). For at vise det, ser vi på $\mathcal{K} = (\cup f)$-afslutningen af $\mathcal{K}_0$. Af Sætning 2.5.3 følger, at $\mathcal{K}$ er semikompakt. Det er let at se, at $\mathcal{K}$ er en indre approksimerende brolægning for λ_1. Af klemme-ind-imellem lemmaet, Sætning 1, følger nu, at λ_1 er σ-kontinuert fra højre i $\emptyset$.

Af det sagte kan vi nu slutte den væsentligste del af sætningen, nemlig at λ har en udvidelse til et mål μ på $\sigma(\mathcal{A})$. Hvad angår regularitetsudsagnet, lader vi $\mathcal{K}^*$ betegne brolægningen af målelige mængder (mængder i $\sigma(\mathcal{A})$), der tillige tilhører $(\emptyset, \cup f, \cap c)$-afslutningen af $\mathcal{K}_0$ $(= (\cap c)$-afslutningen af $\mathcal{K})$. Så er $\mathcal{K}^*$ en semikompakt brolægning af målelige mængder. For at vise, at det konstruerende mål μ er $\mathcal{K}^*$-indre regulært, er det nok at vise, at λ_1 har $\mathcal{K}^*$ som indre approksimerende brolægning. Dette følger let ved en anvendelse af klemme-ind-imellem lemmaet (udnyt Sætning 1, (i) på en konstant følge $E_n \equiv A$ med $A \in \mathcal{A}_1$). $\square$

Bemærkninger. Vi kan notere os nogle delresultater, vi viste undervejs: En stram mængdefunktion på en $(\emptyset, \cap f)$-lukket brolægning kan udvides til et endeligt additivt mål. En stram mængdefunktion på en $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket brolægning som har en semikompakt indre approksimerende brolægning, er σ-kontinuert fra højre. Et mål med en indre-approksimerende semikompakt brolægning, er $\mathcal{K}$-indre regulært med $\mathcal{K}$ en semikompakt brolægning.

Eksempel 1. Lad os vende tilbage til konstruktionen af Lebesgue- og Lebesgue-Stieltjes målene i §2. Med den mere detaljerede information i Sætning 10 og med (4.30) til rådighed, kan vi eksplicit bestemme udtryk for målet af en vilkårlig målelig mængde. F.eks. for Lebesguemålet $\lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ på $\mathbb{R}$ finder vi

$$\lambda(A) = \sup_{K \subseteq A} \inf_{K_0 \supset K} |K_0|; \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{4.31}$$

hvor supremet er over $K \subseteq A$, med K en tællelig fællesmængde af endelige foreningsmængder af lukkede intervaller og infimum er over $K_0 \supseteq K$ med K_0 en endelig foreningsmængde af lukkede intervaller. Størrelsen $|K_0|$ er længden af K_0.

Vi finder også formlen

$$\lambda(A) = \sup\left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K_n}(b_{nk} - a_{nk}) \,\middle|\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{K_n} [a_{nk}, b_{nk}] \subseteq A \right\}\ ; \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \tag{4.32}$$

hvor supremum er over alle mængder $K \subseteq A$ af formen $K = \bigcap_1^\infty K_n$, hvor $K_n \downarrow K$ og hvor hver mængde K_n er af formen $K_n = [a_{n1}, b_{n1}] \cup \cdots \cup [a_{nK_n}, b_{nK_n}]$ med parvis disjunkte intervaller. Er $A = \emptyset$, skal højresiden i (4.32) fortolkes som 0.

Formlerne (4.31) og (4.32) kan udvides på flere måder. F.eks. for Lebesgue-Stieltjes målene gælder lignende udtryk, idet $|K_0|$ i (4.31) og $b_{nk} - a_{nk}$ i (4.32) blot skal erstattes af de udtryk, der så er naturlige. For Lebesgue-Stieltjes målet bestemt ved funktionen F, skal $(b-a)$-udtrykket i (4.32) således erstattes af $F(b) - F(a^-)$, hvor $F(x^-)$ betegner grænseværdi fra venstre.

Vi kan også udvide formlerne til at gælde Lebesguemålene $\lambda_n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$; $n \geq 1$. Så bliver det relevant at se på aftagende følger af endelige disjunkte foreningsmængder af lukkede rektangler.

Endelig kan vi udvide formlerne fra Borel-σ-algebraen til σ-algebraen af Lebesguemålelige mængder.

Muligvis kan læseren ved at tænke nøjere over formlerne – og sammenholde med strukturen af Cantormængden – få en fornemmelse af at hver målelig mængde med positivt mål indeholder en "Cantoragtig" mængde, en fornemmelse vi evt. senere vil udmønte i et præcist formuleret resultat.

Formlerne (4.31) og (4.32) afspejler vores fremgangsmåde via indre mål, der fører til approksimation indefra. Var man gået frem via ydre mål, havde man fundet en formel, der formelt set er enklere, nemlig følgende formel:

$$\lambda(A) = \inf\left\{ \sum_1^\infty (b_n - a_n) \mid \bigcup_{n=1}^\infty]a_n, b_n[\supseteq A \right\}\ ;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{4.33}$$

Her tages altså infimum af den angivne sum over samtlige numerable overdækninger af A med åbne intervaller. Faktisk er det let at vise (4.33) på basis af den udviklede teori. Lad os kort antyde det: Først bemærkes, at man kan antage, at A er begrænset, f.eks. $A \subseteq]0,1[$ (ellers "sammenstykkes"). Vælg F lukket, så $F \subseteq]0,1[\setminus A$ og så $\lambda(F) \approx \lambda([0,1] \setminus A)$. Sæt $G =]0,1[\setminus F$. Så er G åben $G \supseteq A$, og $\lambda(G) \approx \lambda(A)$. Udnyt nu, at enhver åben delmængde af $\mathbb{R}$ er en disjunkt tællelig forening af åbne intervaller (se på de maksimale åbne intervaller indeholdt i G). Resultatet følger så let. $\square$

Vi slutter denne § med endnu en metode til at konstruere mål. Vi udnytter dels noget af den allerede udviklede teori, dels helt specielle betragtninger der – for første gang i dette kursus – direkte spiller på metrikken i et metriserbart rum. Resultatet, vi stiler efter er aktuelt, idet det fører til de såkaldte Hausdorffmål og til den dermed forbundne Hausdorffdimension, begreber, der er vigtige ved diskussion af fraktaler (kaos og alt det der!).

Lad $X = (X, d)$ være et metrisk rum i det følgende

Definition 4.6.7 Lad $\kappa : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ være et ydre mål på det metriske rum. Vi siger, at κ er et *metrisk ydre mål,* såfremt κ er additiv for mængder med positiv afstand, dvs. såfremt implikationen

$$d(A, B) > 0 \Rightarrow \kappa(A \cup B) = \kappa(A) + \kappa(B)$$

gælder for alle $A, B \subseteq X$.

Husk, at afstanden $d(A, B)$ er infimum af $d(x, y)$ over x, y med $x \in A, y \in B$.

Sætning 4.6.11 *Lad κ være et metrisk ydre mål på X. Lad A_n ; $n \geq 1$, B_n ; $n \geq 1$ og G være delmængder af X således, at:*

(a) *G er den disjunkte foreningsmængde af alle A_n'er og B_n'er: $G = \sum_1^\infty A_n + \sum_1^\infty B_n$,*

(b) $\forall n \neq m : d(A_n, A_m) > 0 \wedge d(B_n, B_m) > 0,$

(c) $\forall n : d(A_n, \complement G) > 0 \wedge d(B_n, \complement G) > 0.$

Da vil $G \in \mathfrak{M}_\kappa$, G er altså κ-målelig.

Bevis.

Figur 13

Lad T være en testmængde. Vi skal vise, at $\kappa(T) \geq \kappa(T \cap G) + \kappa(T \setminus G)$. Vi kan antage, at $\kappa(T) < \infty$. Vi har, for alle n:

$$\begin{aligned}
\kappa(T) &= \kappa\big((T \setminus G) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left((T \cap A_k) \cup (T \cap B_k)\right)\big) \\
&\geq \kappa\big((T \setminus G) \cup \bigcup_{k=1}^{n} \left((T \cap A_k) \cup (T \cap B_k)\right)\big) \\
&= \kappa(T \setminus G) + \kappa\big(\bigcup_{k=1}^{n} \left((T \cap A_k) \cup (T \cap B_k)\right)\big) \\
&\geq \kappa(T \setminus G) + \kappa(T \cap G) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(\kappa(T \cap A_k) + \kappa(T \cap B_k)\big).
\end{aligned}$$

Det er derfor nok at vise, at $\sum_1^\infty \kappa(T \cap A_k)$ og $\sum_1^\infty \kappa(T \cap B_k)$ begge er konvergente rækker. Men dette er klart. F.eks. er $\sum_1^n \kappa(T \cap A_k) = \kappa(\bigcup_1^n (T \cap A_k)) \leq \kappa(T) < \infty$ for alle n. $\square$

Sætning 4.6.12 *Lad igen κ være et metrisk ydre mål. Så vil $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}_\kappa$. Enhver Borelmængde er altså κ-målelig.*

Bevis. Fra Korollar 1 ved vi, at $\mathfrak{M}_\kappa$ er en σ-algebra. Kan vi blot vise, at enhver åben mængde er κ-målelig, følger $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}_\kappa$. Lad G være åben. Sæt

$$F_n = \{x \mid d(x, \complement G) \geq \frac{1}{n}\}\,; \quad n \geq 1.$$

Så vil $F_n \uparrow G$. Desuden er $d(F_n, \complement F_{n+1}) > 0$; $n \geq 1$. Sæt nu

$$A_n = F_{2n-1} \setminus F_{2n-2}\,,\ B_n = F_{2n} \setminus F_{2n-1}\,;\ n \geq 1$$

(med $F_0 = \emptyset$). Så kan Sætning 12 anvendes og vi slutter, som ønsket, at $G \in \mathfrak{M}_\kappa$.

Sætning 4.6.13 (Konstruktion af Hausdorffmål) *Lad $X = (X, d)$ være et metrisk rum og $\psi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ en vilkårlig mængdefunktion med $\psi(\emptyset) = 0$. Så er mængdefunktionen $H^\psi : \mathcal{P}(X) \to 0, \infty]$; defineret ved*

$$H^\psi(A) = \sup_{\delta > 0} \inf \left\{ \sum_1^\infty \psi(E_n) \mid \mathrm{diam(E_n)} \leq \delta\,;\ \mathrm{n} \geq 1 \wedge \bigcup_1^\infty \mathrm{E_n} \supseteq \mathrm{A} \right\}\ ;\ A \subseteq X \tag{4.34}$$

et metrisk ydre mål og $H^\psi \mid \mathcal{B}(X)$ er et mål.

Bevis. Lad H_δ^ψ være den mængdefunktion der optræder i (4.34) som et infimum. Så er H_δ^ψ åbenbart et ydre mål – thi H_δ^ψ er det ydre mål induceret af mængdefunktionen, der sender en mængde med diameter $> \delta$ i 0 og en mængde med diameter $\leq \delta$ i $\psi(E)$ i henhold til Sætning 2, (ii). Da det er klart, at et supremum af ydre mål igen giver et ydre mål, er H^ψ et ydre mål. Selve konstruktionen medfører, at H^ψ er et metrisk ydre mål. Lad os vise det. Hvis $d(A,B) > 0$, sætter vi $\delta_0 = d(A,B)$ og for $\delta < \delta_0$ betragter vi overdækninger $\bigcup E_n \supseteq A \cup B$ af $A \cup B$ med mængder E_n med diametre $\leq \delta$. Idet vi med $\sum'$ tilkendegiver summation over indices n, så $E_n \cap A \neq \emptyset$ og med $\sum''$ tilkendegiver summation over de resterende indices, noterer vi, at de "dobbeltmærkede" mængder E_n overdækker B, hvorfor

$$\begin{aligned}\sum \psi(E_n) &= \sum{}' \psi(E_n) + \sum{}'' \psi(E_n) \\ &\geq H_\delta^\psi(A) + H_\delta^\psi(B).\end{aligned}$$

Derfor er $H_\delta^\psi(A \cup B) \geq H_\delta^\psi(A) + H_\delta^\psi(B)$ for $\delta < \delta_0$. Heraf følger det, at $H^\psi(A \cup B) \geq H^\psi(A) + H^\psi(B)$. Den modsatte ulighed er triviel. $\square$

Vi skal i §VI.? se nærmere på Hausdorffmål, Hausdorffdimension m.v. Her nøjes vi med at bemærke, at for mængdefunktionen ψ, der er 1 for alle mængder på nær den tomme mængde, hvor $\psi(\emptyset) = 0$, bliver $H^\psi \mid \mathcal{B}(X)$ lig med tællemålet på $\mathcal{B}(X)$.

Opgaver til Kapitel IV

Opgave 1. En stram mængdefunktion $\lambda = (X, \mathcal{A}, \lambda)$ kan have flere udvidelser til mål på $\sigma(\mathcal{A})$. Vis det!
Vejledning. Se på et eksempel med en meget lille brolægning $\mathcal{A}$!

Opgave 2. Vis, at hvis F i Sætning 4.2.2 enten ikke er ikke-aftagende eller ikke er kontinuert fra højre, så findes intet mål med de anførte egenskaber.

Opgave 3. Vis, at hvis $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er ikke-aftagende, kontinuert fra højre og opfylder betingelserne $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ (F er så en 1-*dimensional fordelingsfunktion*), så findes et entydigt bestemt sandsynlighedsmål μ på $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, så $\mu(]-\infty, x]) = F(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 4. Formålet med denne opgave er at vise formlen

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{\Delta\in D_{n0}} \mu\left(\bigcap_{i\in\Delta} A_i\right) = \sum_{\Delta\in D_{n1}} \mu\left(\bigcap_{i\in\Delta} A_i\right). \qquad (*)$$

Her er μ et mål og A'erne er målelige mængder. Endvidere optræder mængderne D_{n0} og D_{n1}. Disse er defineret som følger: D_{n0} er mængden af ikke-tomme delmængder Δ af $\{1, 2, \cdots, n\}$ som indeholder et lige antal elementer og D_{n1} er den tilsvarende mængde af $\Delta \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ med et ulige antal elementer.

(i) Se på specialtilfældet $n = 2$ i $(*)$

(ii) Vis den generelle gyldighed af $(*)$.

Vejledning. Det er instruktivt både at bevise dette ved induktion og ved udnyttelse af Sætning 4.3.2.

(iii) Vis, at for en vilkårlig følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af målelige mængder gælder formlen:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \sum_{\Delta\in D_0} \mu\left(\bigcap_{i\in\Delta} A_i\right) = \sum_{\Delta\in D_1} \mu\left(\bigcap_{i\in\Delta} A_i\right), \qquad (**)$$

hvor

$$D_0 = \{\Delta \subseteq \mathbb{N} \mid \Delta \neq \emptyset \wedge |\Delta| \text{ lige}\} \text{ og } D_1 = \{\Delta \subseteq \mathbb{N} \mid |\Delta| \text{ ulige}\}.$$

(iv) Hvis μ er et endeligt mål, f.eks. et sandsynlighedsmål, gælder *inklusions/eksklusionsformlen:*

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \sum_i \mu(A_i) - \sum_{i_1<i_2} \mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} \mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) \\ &- \cdots + (-1)^{n+1}\mu(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n). \qquad (***)\end{aligned}$$

Bevis dette.

(v) Vurdér endelig, for n stor, hvor mange permutationer af $\{1, 2, \cdots, n\}$ der findes som har et fixpunkt i forhold til samtlige permutationer (dvs. der ses på mængden af bijektioner $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ så der findes i med $\sigma(i) = i$).

Opgave 5. Konstruér en sandsynlighedsfordeling μ på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (eller på $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$), så den tilhørende fordelingsfunktion F er diskontinuert i ethvert rationalt punkt og ellers kontinuert. Er fordelingen diskret? (Vedr. fordelingsfunktion, se Opgave II.13).

Nogle definitioner. I nedenstående og nogle efterfølgende opgaver har vi brug for følgende definitioner vedrørende et mål $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$: En målelig mængde A er et *atom* for μ, hvis $\mu(A) > 0$ og enhver målelig delmængde af A enten har mål 0 eller mål $\mu(A)$. Atomet A er et *minimalt atom*, hvis A ikke indeholder ægte delmængder, som også er atomer for μ. Atomet A er et ∞-*atom*, hvis $\mu(A) = \infty$. Målet μ er *ikke-atomisk*, hvis det ikke har nogen atomer. Terminologien vedrørende atomer er ikke helt fastlåst i litteraturen. I nogle fremstillinger er et "atom", det vi kalder et minimalt atom.

Opgave 6. Et mål $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ er *endeligt funderet* såfremt

$$\forall A \in \mathcal{B} : \mu(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{B}, \mu(B) < \infty\}.$$

(i) Vis, at ethvert σ-endeligt mål er endeligt funderet.

(ii) Angiv et eksempel på et endeligt funderet mål som ikke er σ-endeligt (se på et passende diskret mål).

(iii) Angiv et eksempel på et mål, der ikke er endeligt funderet (igen kan et diskret mål bruges).

(iv) Bevis, at et mål er endeligt funderet, hvis og kun hvis det ikke indeholder noget ∞-atom.

Opgave 7. Lad X være over-tællelig og lad $\mathcal{B}$ være den tællelige/co-tællelige σ-algebra på X. Se på $0,1$-målet μ på $\mathcal{B}$, dvs. $\mu(A) = 0$ eller 1 eftersom A er tællelig eller co-tællelig.

Bestem μ's atomer. Har μ minimale atomer? Er μ diskret?

Opgave 8. Lad κ være et kardinaltal (nedenfor vil κ enten være $\aleph_0$ eller $2^{\aleph_0}$) og X en mængde med $\mathrm{card}\,(\mathrm{X}) = \kappa$. Ved et *ikke-trivielt* $(0,1)$-*mål*, på X forstås et sandsynlighedsmål μ på $\mathcal{P}(X)$ så det for alle $A \subseteq X$ gælder, at $\mu(A)$ enten er 0 eller 1 og så ingen endelig mængde har mål 1. Kardinaltallet κ er *måleligt*, hvis der findes et sådant mål.

Bevis, at $\aleph_0$ og $2^{\aleph_0}$ begge er ikke-målelige kardinaltal. *Vejledning* vedrørende $2^{\aleph_0}$: Se på $X = 2^{\mathbb{N}}$. Hvis μ er et $(0,1)$-mål, vælg $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}$ så $\{(x_1, x_2, \cdots) \in 2^{\mathbb{N}} \mid x_1 = \varepsilon_1\}$ har mål 1. Vælg så ε_2, så mængden, hvor $x_1 = \varepsilon_1 \wedge x_2 = \varepsilon_2$ har mål 1. Fortsæt.

Bemærkning. Et måleligt kardinaltal må være ufatteligt stort. Et aksiom om sådanne kardinaltals eksistens vil være et kraftigt mængdeteoretisk aksiom.

Opgave 9. Lad $(X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$ være fuldstændiggørelsen af målrummet $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Vis, at $\mathcal{B}_\mu = \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{N})$, hvor $\mathcal{N}$ er brolægningen af $E \subseteq X$ for hvilke der findes $N \in \mathcal{B}$ med $E \subseteq N$ og $\mu(N) = 0$. Vis, at $(X, \mathcal{B}_\mu, \bar{\mu})$ kan karakteriseres som den mindste udvidelse af μ til et fuldstændigt mål.

Opgave 10. For en Borelstruktur $(X, \mathcal{B})$ betegner $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ mængden af målelige funktioner $f : X \to [0, \infty]$. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og $f : X \to [0, \infty]$ en funktion på X.

Bevis, at $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}_\mu)$ hvis og kun hvis der findes $f_* \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ og $f^* \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$, så $f_* \le f \le f^*$ og $f_* = f^*$ n.o.

Vejledning: "hvis": Se f.eks. på mængderne $\{f > t\}$. "kun hvis": Til t bestemmes $A_t \subseteq \{f > t\} \subseteq B_t$ så $\mu(B_t \setminus A_t) = 0$. Se på f_* defineret ved $f_*(x) = \sup\{t \in \mathbb{Q} \mid x \in A_t\}$ og på f^* defineret på lignende vis.

Opgave 11. Hvor langt er et endeligt additivt mål fra at være numerabelt additivt og dermed et mål? For at belyse det, antag, at $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ er et endeligt additivt mål defineret på en σ-algebra (obs.: $\mathcal{B}$ antages altså at være en σ-algebra, ikke blot en algebra). Se på følgende egenskaber:

(i) μ er et mål,

(ii) μ er tælleligt subadditiv $(\mu(\bigcup_1^\infty B_n) \le \sum_1^\infty \mu(B_n))$,

(iii) μ er kontinuert fra venstre $(B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B))$,

(iv) μ er kontinuert fra højre $(B_n \downarrow B \wedge \mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B))$,

(v) μ er kontinuert fra højre i $\emptyset (B_n \downarrow \emptyset \wedge \mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B_n) \to 0$.

Vis, at (i), (ii) og (iii) er ækvivalente betingelser og at alle fem betingelser er ækvivalente, hvis vi yderligere antager, at μ er endeligt funderet (se evt. Opgave 6 eller §6).

Bemærkning. Det er yderst interessant at svække antagelserne, så μ kun er defineret på en algebra (eller, evt. blot på en $(\emptyset, \cup f, \cap f)$-lukket brolægning); så spørger vi ikke, om μ er et mål, men om μ kan udvides til et mål. Se §6.