Kapitel 5

Integralet

5.1 Integral af ikke-negative funktioner, eksistens og entydighed

Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Vi indfører betegnelsen $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ for mængden af målelige funktioner $f : X \to [0, \infty]$ (obs: værdien $+\infty$ tillades) og betegnelsen $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{B})$ for mængden af simple funktioner $f : X \to [0, \infty[$ (obs: pr. definition antager simple funktioner ikke værdien $+\infty$).

Vi ønsker at definere en afbildning $I_\mu : \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}) \to [0, \infty]$ således, at I_μ indfrier de forventninger vi har til "integralet m.h.t. μ". Vi skal se, at denne opgave har en smuk løsning. Der findes én og kun én fornuftig løsning, alle kan enes om. Når vi først har fundet svaret, vil vi gå over til betegnelsen $\int f d\mu$ i stedet for $I_\mu(f)$. Men til at begynde med, hvor vi ikke ved, at der er et entydigt svar, holder vi os fra notation med brug af integraltegn.

Der er nogle naturlige krav, alle kan enes om at stille til den søgte afbildning I_μ. Det første krav er, at I_μ stemmer overens med det allerede indførte integral for simple funktioner (§4.3), altså at:

$$f \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{B}) \Rightarrow I_\mu(f) = \sum_{t \in \mathbb{R}_+} t \cdot \mu(f^{-1}(t)). \tag{5.1}$$

Andre krav hidrører fra et ønske om at egenskaber, vi kender for målet af målelige mængder – som vi jo kan tænke på som indikatorfunktionerne i $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ – på naturlig måde udvides til egenskaber for alle funktioner i $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$. Ser vi således på de elementære egenskaber i Sætning 4.3.1, fører det til et ønske om at I_μ opfylder monotonicitets-, additivitets- og konvergensegenskaber. Alt, hvad vi beder om i denne retning kan faktisk lade sig gøre. Vi vælger i vores første resultat at hæfte os i særlig grad ved følgende krav: $f_n \uparrow f \Rightarrow I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$, der er en naturlig udvidelse af sætningen om approksimation indefra (Sætning 4.3.1, (v)).

Sætning 5.1.1 (Hovedsætning om eksistens og entydighed af integralet for ikke-negative funktioner) *Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Der findes da en entydigt bestemt afbildning*
$I_\mu : \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}) \to [0, \infty]$ *således, at* $1°$*:* I_μ *stemmer overens med det tidligere indførte integral for simple ikke-negative funktioner,* $2°$*:* I_μ *er monoton, dvs. der gælder implikationen* $f \leq g \Rightarrow I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$ *og* $3°$*: for en følge af funktioner i* $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ *gælder implikationen* $f_n \uparrow f \Rightarrow I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$*.*

Bevis. Antag, at I_μ opfylder kravene $1°$, $2°$ og $3°$. Vi vil vise, at så må

$$I_\mu(f) = \sup\left\{I_\mu(g) \mid g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{B}), g \leq f\right\}. \tag{5.2}$$

Kan vi vise dette, er der altså kun ét håb om en afbildning af den ønskede art, og entydigheden vil være vist.

Det er klart, at der gælder "$\geq$" i (5.2). For at vise den modsatte ulighed udnyttes Sætning 3.2.1. I henhold til dette resultat (og udvidelsen antydet i bemærkningen hertil) findes nemlig, til en given funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$, en følge $(g_n)_{n \geq 1}$ af funktioner i $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{B})$, så $g_n \uparrow f$. Af $3°$ følger, at der findes n, så $I_\mu(g_n) \approx I_\mu(f)$ ("$\approx$" betyder "tæt på"; her er det væsentligt, at til $t < I_\mu(f)$ findes n, så $I_\mu(g_n) > t$). Vi slutter, at "$\geq$" gælder i (5.2). Dermed er entydigheden bevist.

For at vise eksistensen skal vi blot godtgøre, at I_μ defineret på $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ ved (5.2) opfylder $1°$, $2°$ og $3°$. Egenskaberne $1°$ og $2°$ er banale. Vi ser nu på $3°$ og antager, at $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ opfylder $f_n \uparrow f$. Det er klart, at $\lim I_\mu(f_n) \leq I_\mu(f)$. Tilbage står at vise, at $I_\mu(f) \leq \lim I_\mu(f_n)$, hvilket er ensbetydende med at det for $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{B})$ med $g \leq f$ gælder, at $I_\mu(g) \leq \lim I_\mu(f_n)$. Lad derfor g være en simpel funktion med $g \leq f$. Lad $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ være de (forskellige) positive værdier, g antager, og lad $A_1, \cdots, A_k$ være de tilhørende mængder, dvs. $A_\nu = g^{-1}(\alpha_\nu)$; $\nu = 1, \cdots, k$. Hold nu for en tid $\rho < 1$ og $t_1, \cdots, t_k$ med $t_\nu < \mu(A_\nu)$; $\nu \leq k$ faste. For hvert $\nu \leq k$ vil $A_\nu \cap \{f_n > \rho \cdot \alpha_\nu\} \uparrow A_\nu$. Vælg nu $n_0 \in \mathbb{N}$, så

$$\mu(A_\nu \cap \{f_{n_0} > \rho \cdot \alpha_\nu\}) \geq t_\nu\,; \quad \nu \leq k$$

(samme n_0 kan bruges for alle ν, da der kun er endeligt mange ν'er). Da nu

$$\sum_{\nu \leq k} \rho \alpha_\nu \, 1_{A_\nu \cap \{f_{n_0} > \rho \alpha_\nu\}} \leq f_{n_0},$$

vil

$$I_\mu(f_{n_0}) \geq \sum_{\nu \leq k} \rho \alpha_\nu t_\nu,$$

hvoraf

$$\lim_{n \to \infty} I_\mu(f_n) \geq \rho \sum_{\nu \leq k} \alpha_\nu t_\nu$$

følger. Udnytter vi nu friheden til at vælge ρ tæt på 1 og t_ν'erne tæt på $\mu(A_\nu)$'erne følger det, at

$$\lim_{n\to\infty} I_\mu(f_n) \geq \sum_{\nu\leq k} \alpha_\nu \mu(A_\nu) = I_\mu(g),$$

som ønsket. □

Bemærkninger. Man kan vise et noget stærkere entydighedsresultat, for hvilket kravet 3° svækkes betydeligt (se Opgave 1). Som en interessant variant nævnes, at hvis vi kun ser på begrænsede funktioner og hvis μ er et endeligt mål, så er 1° og 2° nok for entydighedsresultatet. Den rigtige værdi for simple funktioner og monotonicitet er altså i alt væsentligt nok til at karakterisere integralet. For dette er de angivne endelighedsbetingelser ($\mu(X) < \infty$, funktionerne begrænsede) væsentlige, hvilket illustreres af passende eksempler (se igen Opgave 1).

Definition 5.1.1 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Ved *integralet* af en funktion $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ m.h.t. μ forstås den ved Sætning 1 entydigt bestemte værdi $I_\mu(f)$. For denne værdi benytter vi en af følgende betegnelser

$$\int f, \int f d\mu, \int_X f d\mu, \int f(x) d\mu(x)\,, \quad \int f(x)\mu(dx).$$

Funktionen $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ er *integrabel,* hvis $\int f d\mu < \infty$.

Vi har således

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} \leq f \right\}. \tag{5.3}$$

Øvelse 1. Gør rede for denne formel (præcisér indholdet (hvilke f, n, α_i, A_i?) og eftervis formlens gyldighed).

Definition 5.1.2 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. For $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ og $A \in \mathcal{B}$ defineres *integralet af f over A* som integralet af $f \cdot 1_A$. Betegnelse og definition er indeholdt i formlen

$$\int_A f d\mu = \int f 1_A d\mu. \tag{5.4}$$

Vi siger, at f er *integrabel over A*, såfremt $\int_A f d\mu < \infty$.

Integralbegrebet vi har indført ovenfor skyldes Lebesgue og vi taler om *Lebesgue-integralet* også i tilfælde, hvor målet er et andet end Lebesgue målet. Eventuelt kan man tale om det *abstrakte Lebesgueintegral.*

Eksempel 1. Lad $\lambda = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ være Lebesguemålet på $\mathbb{R}$. Som bekendt er enhver kontinuert funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabel over et begrænset interval $[a,b]$. Lad os vise (foreløbig for ikke-negative kontinuerte funktioner), at der er overensstemmelse mellem Lebesgueintegralet og Riemannintegralet. Lad derfor $f \in C^+(\mathbb{R})$ og lad $[a,b]$ være et begrænset lukket interval.

Vi påstår, at så er

$$\text{(Riemann)} \int_a^b f(x)dx = \text{ (Lebesgue)} \int_{[a,b]} f d\lambda. \tag{5.5}$$

For at se det, foretager vi successive inddelinger af $[a,b]$ med finhed gående mod 0 (f.eks. så n'te inddeling har delepunkter af formen $a+\nu(b-a)/2^n$; $\nu = 0, \cdots, 2^n$) og betragter undersummerne hørende til disse inddelinger. Disse undersummer hører på naturlig måde sammen med nogle simple funktioner og er lig med integralerne af disse. Da f er ligelig kontinuert i $[a,b]$ ses, at omtalte simple funktioner, kald dem s_n, konvergerer monotont mod $f : s_n \uparrow f$. I henhold til Sætning 1, vil $\int s_n d\lambda$ også konvergere mod Lebesgue-integralet $\int_{[a,b]} f(x)dx$. Heraf følger (5.5).

En nærmere analyse viser, at enhver Riemann-integrabel funktion er Lebesgue-integrabel og de to værdier af integralet stemmer overens (se Opgave x). Men Lebesgueintegralet giver en kraftig udvidelse af Riemannintegralet (se f.eks. Opgave 2). Med Lebesgueintegralet kan vi altså integrere flere funktioner. Tillige, og nok så vigtigt, har Lebesgueintegralet bedre kontinuitetsegenskaber (resultater af typen $f_n \to f \Rightarrow \int f_n \to \int f$), hvilket vi allerede har set ét eksempel på ($0 \leq f_n \uparrow f \Rightarrow \int f_n \to \int f$). □

Eksempel 2. Lad $\mu = (X, \mathcal{P}(X), \mu)$ være tællemålet på mængden X. For $f : X \to [0, \infty[$ vil vi bevise, at

$$\int f d\mu = \sum_{x \in X} f(x). \tag{5.6}$$

Uligheden "$\geq$" er klar, thi højresiden er supremum af afsnitssummerne (se Appendix 1.11), der hver for sig kan opfattes som integralet af en simpel funktion, der er $\leq f$. Overvej.

Uligheden "$\leq$" vises også let, f.eks. som følger. Den er triviel, hvis $\sum f(x) = \infty$. Og hvis $\sum f(x) < \infty$, vil enhver simpel funktion $s \leq f$ kun være positiv på en endelig mængde og så ses det, at $\int s d\mu = \sum s(x) \leq \sum f(x)$. Dette gælder enhver simpel funktion $\leq f$, så $\int f d\mu$ må være $\leq \sum f(x)$. □

De to eksempler er vigtige. Første eksempel (med tilhørende opgave) viser, at Lebesgueintegralet udvider det allerede kendte integralbegreb og andet eksempel kan f.eks. bruges til at opbygge intuitionen, der peger på integralet som en slags summer.

Vi slutter med et lille eksempel, der udnytter, at for den udviklede teori må funktionerne godt antage værdien ∞.

Eksempel 3. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og A en målelig mængde. Vi vil udregne $\int f d\mu$ for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \infty; & x \in A \\ 0; & x \in \complement A, \end{cases}$$

der også kan skrives $\infty 1_A$. Hertil bemærkes, at funktionerne $s_n = n \cdot 1_A$ er simple ikke-negative og $s_n \uparrow f$. Så vil $\int s_n d\mu \to \int f d\mu$. Derfor er

$$\int f d\mu = \begin{cases} \infty\,; & \mu(A) > 0 \\ 0\,; & \mu(A) = 0. \end{cases} \qquad \square$$

5.2 Integralet for ikke-negative funktioner

Med vores hovedresultat fra sidste § har vi vist enkelte centrale egenskaber for integralet, men ikke nær udtømt mulighederne. Vi samler en række centrale kendsgerninger i én sætning ("de ti bud"):

Sætning 5.2.1 (Hovedsætning om integralets egenskaber for ikke-negative funktioner) *Idet μ er et mål, og alle funktioner neden for er målelige funktioner med værdier i $[0, \infty]$ og konstanten α i* (iv) *tilhører $[0, \infty]$, gælder følgende:*

(i) (nulkriterium) $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *n.o.*

(ii) (endelighedskriterium) $\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ *n.o.*

(iii) (identitetskriterium) $f = g$ *n.o.* $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$

(iv) (homogenitet) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$

(v) (additivitet) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

(vi) (monoton $\uparrow$ konvergens) $f_n \uparrow f \Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f d\mu$

(vii) (monoton $\downarrow$ konvergens) $f_n \downarrow f, \int f_1 d\mu < \infty \Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f d\mu$

(viii) (numerabel additivitet) $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$

(ix) (monotoni) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

(x) (Fatou's lemma) $\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$

Bevis. (vi) og (ix) er gentagelser fra Sætning 5.1.1.

(iv): Dette er trivielt hvis $\alpha < \infty$ (ikke og?). For at vise resultatet for $\alpha = \infty$ udnytter vi, at $nf \uparrow \infty f$. Så viser (vi), at $\int nf d\mu \to \int \infty f d\mu$. Da også $\int nf d\mu \to \infty \int f d\mu$ i henhold til det allerede viste, følger (iv) nu også i tilfældet $\alpha = \infty$.

(i): Udnyt (iv):

$$\begin{aligned}\int f d\mu = 0 \;&\Leftrightarrow\; \infty \int f d\mu = 0 \Leftrightarrow \int \infty f d\mu = 0 \Leftrightarrow \int \infty 1_{\{f>0\}} d\mu = 0\\ &\Leftrightarrow\; \infty \int 1_{\{f>0\}} d\mu = 0 \Leftrightarrow \infty\mu(f>0) = 0 \Leftrightarrow \mu(f>0) = 0\\ &\Leftrightarrow\; f = 0 \text{ n.o.}\end{aligned}$$

Bemærkning: Når vi kalder resultatet et "kriterium", er dette måske lidt misvisende. Et kriterium er jo en tilstrækkelig betingelse for en egenskab. Læst "$\Rightarrow$" er (i) et kriterium for at integralet er 0, læst "$\Rightarrow$" et kriterium for at f er 0 n.o.

(ii): Dette vises måske lettest ved kontraposition. Hvis nemlig $f = \infty$ på en mængde A med positivt mål, vil $\infty 1_A \le f$ og (iv) og (ix) fører så direkte til konklusionen $\int f d\mu = \infty$. *Bemærkning:* Resultatet er et kriterium for at en funktion er endelig n.o.

(v): Af Sætning 4.3.2 følger, at integralet er additivt for simple funktioner. Overvej! Bestem nu, til de givne funktioner f og g, følger af simple funktioner (s_n) og (t_n), så $s_n \uparrow f$ og $t_n \uparrow g$. Så vil $s_n + t_n \uparrow f + g$. Da tillige funktionerne $s_n + t_n$ er simple, finder vi

$$\begin{aligned}\int (f+g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} (\int s_n d\mu + \int t_n d\mu)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

(iii): Udnyt, at $f \le g + \infty 1_{\{f \ne g\}}$ sammen med (ix), (v) og (iv) til at slutte, at når $f = g$ n.o., er $\int f d\mu \le \int g d\mu$. Overvej! På samme måde udledes den modsatte ulighed. *Bemærkning:* Resultatet er et kriterium for at to integraler stemmer overens.

(vii) følger umiddelbart let, skulle man tro, ud fra (v) og (vi), idet $f_1 - f_n \uparrow f_1 - f$. Der er imidlertid en teknisk vanskelighed idet funktionerne $f_1 - f_n$ og $f_1 - f$ ingen gang behøver være veldefinerede ("$(\infty - \infty)$-problemet"). Vi må sno os lidt for at overvinde vanskeligheden. Lad os vise i detaljer, hvordan man kan bære sig ad og så i lignende situationer sidenhen stort set overlade det til læseren at klare "$(\infty - \infty)$-problemer". Da $\int f_1 d\mu < \infty$ findes ifølge (ii) en målelig mængde A, så $f_1 < \infty$ på A (altså $\forall x \in A : f_1(x) < \infty$) og så $\mu(\complement A) = 0$. Sæt $f_n^* = f_n \cdot 1_A; n \ge 1$ og $f^* = f \cdot 1_A$. Så vil $f_n^* \downarrow f^*$ og alle f_n^*-funktionerne og f^* er endelige *overalt.* Tillige er $f_n^* = f_n$ n.o.; $n \ge 1$ og $f^* = f$ n.o. Dermed kan (iii) anvendes til at slutte, at ustjernede og tilsvarende stjernede funktioner har samme integral. Af $f_1^* - f_n^* \uparrow f_1^* - f^*$ (alle funktioner her er veldefinerede!) sluttes af (iv), at $\int (f_1^* - f_n^*) d\mu \to \int (f_1^* - f^*) d\mu$. Nu følger det af (v) i forbindelse med ligningen $f_1^* = (f_1^* - f_n^*) + f_n^*$ samt integrabiliteten af f_1^*, at $\int (f_1^* - f_n^*) d\mu = \int f_1^* d\mu - \int f_n^* d\mu$. Tilsvarende er $\int (f_1^* - f^*) d\mu = \int f_1^* d\mu - \int f^* d\mu$. Derfor vil $\int f_1^* d\mu - \int f_n^* d\mu \to \int f_1^* d\mu - \int f^* d\mu$ og vi slutter, at $\int f_n^* d\mu \to \int f^* d\mu$ og dermed den ønskede konklusion $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

(viii) følger af (vi) og (v):

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

(x) følger af (vi) og (ix):

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu &= \int \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} f_m d\mu = \sup_{n\geq 1} \int \inf_{m\geq n} f_m d\mu \\ &\leq \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} \int f_m d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Hermed er alle dele af sætningen bevist. □

Resultatet (vi) hedder også *Lebesgue's Sætning om monoton konvergens.* Det er dét resultat, vi har baseret udviklingen af integralbegrebet på.

Ved beviset for (vii) stødte vi på en teknisk vanskelighed, idet vi ikke umiddelbart af $f \leq g$ kan slutte $\int (g-f)d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$. Vore overvejelser viste dog, at der gælder

Sætning 5.2.2 *Hvis $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$, hvis $f \leq g$, hvis $g - f$ er veldefineret og hvis f er integrabel, så er*

$$\int (g-f)d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu. \tag{5.7}$$

Vi kunne her undgå betingelsen "$g - f$ veldefineret" ved at vedtage, at $g - f$ defineres efter en eller anden ("målelig") vedtægt for x'er med $f(x) = g(x) = \infty$, f.eks. kunne man sætte $(g - f)(x) = 0$ for sådanne x'er eller man kunne sætte $(g - f)(x) = \infty$ for sådanne x'er. Med en vedtægt af denne art kan vi sige, at subtraktionsegenskaben (5.7) gælder målelige funktioner med $0 \leq f \leq g$, dog må vi naturligvis kræve, at højresiden ikke er på den udefinerede form $\infty - \infty$. Hvilken vedtægt, vi anvender for $g - f$ for x'er med $f(x) = g(x) = \infty$ er underordnet.

Ofte kan man klare irriterende problemer med $\infty - \infty$ ved en tilføjelse i stil med: "$\cdots$ med en passende vedtægt vedrørende $\pm\infty$" el. lign.

Integralet, vi har studeret, svarer til det fra gymnasiet (og Mat 1) kendte *bestemte* integral. Vi vil nu vise, hvordan man i Lebesgue's teori indfører *ubestemte* integraler, foreløbig dog kun for ikke-negative funktioner.

Sætning 5.2.3 (ubestemt integral, indledende resultat) *Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og lad $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$. Da er mængdefunktionen $\varphi : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ givet ved*

$$\varphi(B) = \int_B f d\mu\,; \quad B \in \mathcal{B} \tag{5.8}$$

et mål. Hvis $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ *og* $g = f$ *n.o., bestemmer* g *samme mål som* f *ved integration over de målelige mængder og hvis* μ *er* σ*-endeligt, findes ingen andre funktioner med denne egenskab. Med andre ord, for* μ σ*-endelig gælder, at hvis* $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ *opfylder betingelsen*

$$\forall B \in \mathcal{B} : \int_B g d\mu = \int_B f d\mu, \tag{5.9}$$

så er $g = f$ *n.o.*

Bevis. Vi har fra Sætning 1, at

$$\varphi(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = \int f \cdot 1_\emptyset d\mu = \int 0 d\mu = 0,$$

og for $(B_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ parvis disjunkte, er

$$\begin{aligned} \varphi\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) &= \int_{\bigcup B_n} f d\mu = \int f \cdot 1_{\bigcup B_n} d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty f \cdot 1_{B_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int f \cdot 1_{B_n} d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{B_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \varphi(B_n). \end{aligned}$$

Så φ er et mål.

Det følger af identitetskriteriet, at hvis $g = f$ n.o., er $\int_B g d\mu = \varphi(B)$; $B \in \mathcal{B}$.

Antag nu, at μ er σ-endelig og at også $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ fører til φ, idet (5.9) gælder. For at vise $g = f$ n.o., bestemmer vi først $(X_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, så $X = \cup_1^\infty X_n$ og så $\mu(X_n) < \infty$; $n \geq 1$.

For $k \geq 1$ sætter vi

$$B_{nk} = X_n \cap \{f < g\} \cap \{f < k\}.$$

Så er f integrabel over B_{nk}'erne, dvs. $\int f \cdot 1_{B_{nk}} d\mu < \infty$. I henhold til (5.9) gælder dette så også g, og de to integraler er ens. Af Sætning 2 finder vi nu

$$\int (g - f) 1_{B_{nk}} d\mu = \int (g 1_{B_{nk}} - f 1_{B_{nk}}) d\mu = 0.$$

Så må $g = f$ n.o. på B_{nk} (anvend nulkriteriet). Det følger, at $g = f$ n.o. på $\cup\{B_{nk} \mid k \geq 1\}$, dvs. $g = f$ n.o. på $X_n \cap \{f < g\}$. Altså er $X_n \cap \{f < g\}$ en nulmængde. Tilsvarende er $X_n \cap \{g < f\}$ en nulmængde. Så er $X_n \cap \{f \neq g\}$ en nulmængde. Da $X = \cup_1^\infty X_n$, må $\{g \neq f\}$ være en nulmængde, og dermed må $f = g$ n.o., som ønsket. $\square$

Definition 5.2.1 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et mål. For $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$, kaldes mængdefunktionen $B \curvearrowright \int_B f d\mu$; $B \in \mathcal{B}$ det *ubestemte integral af f m.h.t. μ*. Hvis φ er et mål på $(X, \mathcal{B})$ og φ er det ubestemte integral af en funktion f m.h.t. μ, siger vi, at *φ har tæthed m.h.t. μ* og f kaldes en *tæthedsfunktion*, eller blot en *tæthed*, for φ m.h.t. μ. Vi giver udtryk for denne sammenhæng med notationen

$$f = \frac{d\varphi}{d\mu} \tag{5.10}$$

og f kaldes også en *Radon-Nikodym afledet* af φ m.h.t. μ.

Sætning 3 siger så, at et ubestemt integral er et mål, at tæthedsfunktionen altid kan ændres på en μ-nulmængde og at tæthedsfunktionen er entydigt bestemt på nær en μ-nulmængde, blot μ er σ-endelig. På grund af entydighedsresultatet, taler vi normalt om *tætheden* eller *tæthedsfunktionen* eller den *Radon-Nikodym afledede* af φ m.h.t. μ. I forbindelse med entydigheden af tætheden henvises til Opgave 5 der viser, præcis for hvilke mål μ man altid – for alle ubestemte integraler m.h.t. μ – kan slutte entydighed af tætheden. Det er naturligvis entydigheden – omend den kun gælder n.o. – der berettiger en notation som (5.10).

Det er nærliggende, på grund af tæthedens entydighed, at spørge, om man eksplicit kan konstruere tætheden. Et andet nærliggende spørgsmål er, hvilke mål φ, der har tæthed m.h.t. μ. Disse spørgsmål skal vi se nærmere på i Kapitel VII. Her indskrænker vi os til en banal observation. Først en definition:

Definition 5.2.2 Lad φ og μ være mål på samme Borelstruktur $(X, \mathcal{B})$. Målet φ er *absolut kontinuert m.h.t. μ*, og vi skriver $\varphi \ll \mu$, såfremt enhver μ-nulmængde er en φ-nulmængde, altså såfremt $\mu(B) = 0 \Rightarrow \varphi(B) = 0$.

Sætning 5.2.4 *Hvis målet φ har tæthed m.h.t. målet μ, vil $\varphi \ll \mu$.*

Dette er banalt. Overvej! Vi skal sidenhen (Sætning 7.xx) se, at der gælder et omvendt resultat hertil.

Vi slutter med at påpege et let og nyttigt resultat, der viser, hvordan integration m.h.t. φ reduceres til integration m.h.t. μ, når φ har tæthed m.h.t. μ.

Sætning 5.2.5 *Antag, at målet $\varphi = (X, \mathcal{B}, \varphi)$ har tætheden f m.h.t. målet $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$. For en vilkårlig funktion $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ gælder da, at*

$$\int g d\varphi = \int g \cdot f d\mu. \tag{5.11}$$

Bevis. Hvis $g = 1_B$ med $B \in \mathcal{B}$, gælder (5.11). Af integralets additivitet ses dernæst, at (5.11) gælder for $g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{B})$. Endelig udnyttes Lebesgue's sætning om monoton konvergens til at slutte gyldigheden af (5.11) for vilkårlige $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ $\square$

Formlen (5.11) kan skrives på den suggestive form:

$$\int g d\varphi = \int g \frac{d\varphi}{d\mu} d\mu. \tag{5.12}$$

5.3 Integralet for vilkårlige reelle funktioner

Definition 5.3.1 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Med $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ betegnes mængden af målelige funktioner af X ind i $\bar{\mathbb{R}}$. For $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ defineres *integralet af f m.h.t. μ* ved

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu, \tag{5.13}$$

såfremt dette udtryk ikke er af formen $\infty - \infty$. Hvis udtrykket er af denne form, defineres integralet ikke. Såfremt f kun antager reelle værdier ($\forall x \in X : |f(x)| < \infty$) og $\int f d\mu \in \mathbb{R}$ (dvs. $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$ er begge endelige), siges f at være *integrabel m.h.t. μ*, eller blot *μ-integrabel*. Mængden af alle μ-integrable funktioner betegnes $\mathcal{L}(X, \mathcal{B}, \mu)$, eventuelt blot $\mathcal{L}(X, \mu)$.

Bemærk en svag inkonsistens. Mens det er klart, at det ved (5.13) definerede integral stemmer overens med det i §§1–2 behandlede integral for ikke-negative funktioner, er vi nu , hvor talen er om vilkårlige funktioner, mere restriktive, når vi taler om integrabilitet, idet vi forlanger, at en integrabel funktion er overalt endelig. Dette er hensigtsmæssigt for at undgå problemer med $\infty - \infty$. En vigtig begrundelse for at forlange, at de integrable funktioner er endelige, er også, at vi hermed opnår, at $\mathcal{L}(X, \mu)$ bliver et vektorrum, se nedenfor.

Præcis som for integralet af ikke-negative funktioner vælger vi her, for generelle funktioner, at samle de vigtigste egenskaber i én sætning.

For at opnå en bekvem formulering udvider vi integralet en smule i forhold til Definition 1, idet vi også tillægger visse funktioner, der ikke er overalt definerede et integral. Præcist: For en målelig funktion $f : X_0 \to \bar{\mathbb{R}}$ defineret på $X_0 \in \mathcal{B}$, hvor $\complement X_0$ antages at være en nulmængde (f er altså defineret n.o.) sættes $\int f d\mu = \int \bar{f} d\mu$, hvor $\bar{f}$ betegner en funktion i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$, der stemmer overens med f på X_0, forudsat at $\int \bar{f} d\mu$ er veldefineret. Et af de første resultater, vi viser nedenfor sikrer, at værdien af $\int \bar{f} d\mu$ er uafhængig af valget af målelig udvidelse $\bar{f}$ af f. Vi råder læseren til at antage, at alt er endeligt ved første gennemgang af resultatet nedenfor.

Sætning 5.3.1 (Hovedsætning om integralets egenskaber) *Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og antag, at alle funktioner f, g, f_n; $n \geq 1$, der optræder nedenfor er målelige, udvidet reelle funktioner, der er overalt definerede på X (dvs. funktionerne tilhører $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$). Da gælder:*

(i) (endelighedskriterium) $\int f d\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow |f| < \infty$ *n.o.*

(ii) (absolut integrabilitet) $\int f d\mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int |f| d\mu \in \mathbb{R}$,

$$f \in \mathcal{L}(X, \mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(X, \mu)$$

(iii) (trekantsulighed) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ *(blot $\int f d\mu$ er veldefineret)*

(iv) (identitetskriterium) $f = g$ *n.o.* $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$[1]

(v) (integrabilitetskriterium) $|f| \leq g \wedge g \in \mathcal{L}(X, \mu) = f \in \mathcal{L}(X, \mu)$[2]

(vi) (vektorrumsegenskaber)

$f \in \mathcal{L}(X, \mu) \wedge a \in \mathbb{R} \Rightarrow af \in \mathcal{L}(X, \mu) \wedge \int af d\mu = a \int f d\mu$,

$f \in \mathcal{L}(X, \mu) \wedge g \in \mathcal{L}(X, \mu) \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}(X, \mu) \wedge \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

(vii) (monotoniegenskaber)

$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$, *hvis begge integraler er veldefinerede,*

$f \leq g \wedge \int f d\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \int (g - f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$,[3]

$f \leq g \wedge \int f d\mu \in \mathbb{R} \wedge \int f d\mu = \int g d\mu \Rightarrow f = g$ *n.o.*

(viii) (monoton $\uparrow$ konvergens) $f_n \uparrow f \wedge \int f_1 d\mu > -\infty \Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f d\mu$

(ix) (monoton $\downarrow$ konvergens) $f_n \downarrow f \wedge \int f_1 d\mu < \infty \Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f d\mu$

(x) (Lebesgue's sætning om domineret konvergens)

$f_n \to f$ *n.o.* $\wedge \exists g \in \mathcal{L}(X, \mu) \forall n \geq 1 : |f_n| \leq g$ *n.o.* $\Rightarrow \int |f_n - f| d\mu \to 0$, *specielt vil* $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

(xi) (Beppo-Levi's sætning)

$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergent n.o.* $\wedge \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu \in \mathbb{R} \wedge$
$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$[4]

Bevis. (i) Hvis $\int f d\mu \in \mathbb{R}$, vil $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$ begge være endelige og resultatet følger af endelighedskriteriet for ikke-negative funktioner.

(ii): Da generelt $g \in \mathcal{L}(X, \mu) \Leftrightarrow |g| < \infty \wedge \int g d\mu \in \mathbb{R}$, følger anden biimplikation af første. Første biimplikation vises let ved at udnytte integralets additivitet for ikke-negative funktioner:

$$\begin{aligned} \int f d\mu \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \int f^+ d\mu < \infty \wedge \int f^- d\mu < \infty \Leftrightarrow \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \int |f| d\mu < \infty. \end{aligned}$$

[1] dette skal forstås i den stærkest tænkelige forstand: enten er ingen af integralerne veldefinerede eller begge integraler er veldefinerede (i $\bar{\mathbb{R}}$) og værdierne stemmer overens.

[2] det er vigtigt, når man anvender dette kriterium, at huske, at det også er forudsat, at f er målelig.

[3] Højresiden er veldefineret. For venstresiden, altså $\int (g - f) d\mu$, er det vigtigt, at vi fortolker den efter den udvidede definition anført lige før sætningen.

[4] En tilsvarende bemærkning som den til (vii), gør sig gældende her. Bemærk iøvrigt, at vi åbenbart kan slutte det formelt set stærkere resultat, at $\sum f_n$ er absolut konvergent n.o.

(iii): Når mindst ét af integralerne $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$ er endeligt, er $|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$.

(iv): Når $f = g$ n.o., er $f^+ = g^+$ n.o. og $f^- = g^-$ n.o. og af identitetskriteriet for ikke-negative funktioner fås så, at $\int f^+ d\mu = \int g^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu = \int g^- d\mu$. Definitionen viser så, at $\int f d\mu$ er veldefineret, hvis og kun hvis $\int g d\mu$ er det, og i bekræftende fald stemmer de to integraler overens.

(v): Følger af (ii) idet $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu$.

(vi): Resultatet vedrørende homogenitet vises let. Beviset overlades til læseren. Vedrørende sum, bemærker vi først, at når f og g er integrable, følger det af $|f+g| \leq |f|+|g|$ og tidligere resultater (herunder Sætning 3.1.4, der sikrer målelighed af $f+g$), at $f+g$ er integrabel. At $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$, kan nu vises således: Af

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

fås

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-,$$

hvor alle led er ikke-negative integrable funktioner. Så er

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int (f+g)^- d\mu$$

og man finder heraf, at $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

(vii): Når $f \leq g$, er $f^+ \leq g^+$ og $f^- \geq g^-$. Hvis både $\int f d\mu$ og $\int g d\mu$ er veldefinerede, er $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu$. Hvis $\int f d\mu \in \mathbb{R}$ fås, på nær knas med $\infty - \infty$ (problemer, der klares som tidligere antydet i §2), at $f + (g - f) = g$ således, at $\int f d\mu + \int (g-f) d\mu = \int g d\mu$, hvoraf $\int (g-f) d\mu = \int g d\mu - \int f d\mu$. Hvis $\int g d\mu = \int f d\mu$, vil $\int (g-f) d\mu = 0$ og $f = g$ n.o. følger af nulkriteriet for ikke-negative funktioner.

(viii): På nær knas med $\pm\infty$ (problemer, vi forbigår), er dette let, idet vi af $f_n \uparrow f$ får $f_n - f_1 \uparrow f - f_1$ og så kan (vii) udnyttes.

(ix): Behandles analogt eller man går over til de modsatte funktioner $-f_n$ og udnytter (viii).

(x): Ved eventuelt at modificere de indgående funktioner ses, at vi kan antage, at alle funktionerne $f_n; n \geq 1$, f og g er overalt endelige og at $f_n \to f$ overalt, altså $f_n(x) \to f(x)$ for alle $x \in X$. Desuden bemærker vi, at alle integraler $\int f_n d\mu$; $n \geq 1$, $\int f d\mu$ og $\int g d\mu$ er endelige. Anvender vi Fatou's lemma (Sætning 5.2.1, (x)) på følgen $(h_n)_{n \geq 1}$ af ikke-negative hjælpefunktioner givet ved $h_n = 2g - |f_n - f|$, fås

$$\begin{aligned} \int 2g d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \int 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu. \end{aligned}$$

Derfor må $\int |f_n - f| d\mu \to 0$. Af (iii) følger så, at $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

(xi): Af Sætning 5.2.1, (viii) følger, at $\sum_1^\infty |f_n|$ har endeligt integral. Så er $\sum_1^\infty f_n$ absolut konvergent n.o., specielt konvergent n.o. Ved at modificere de indgående funktioner på en nulmængde indses, at vi kan tillade os at antage, at $\sum_1^\infty f_n$ er overalt konvergent. Af (v) ses, at $\sum_1^\infty f_n$ er integrabel. Da afsnitssummerne $\sum_1^N f_n \to \sum_1^\infty f_n$ og da $\sum_1^\infty |f_n|$ kan bruges som en tilhørende majorantfunktion i (x), sluttes, at $\int \sum_1^N f_n d\mu \to \int \sum_1^\infty f_n d\mu$ og $\sum_1^\infty \int f_n d\mu = \int \sum_1^\infty f_n d\mu$ følger. $\square$

I mange undersøgelser arbejder man med komplekse i stedet for reelle funktioner. Er $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et målrum og $f : X \to \mathbb{C}$ en kompleks funktion, kan integralet $\int f d\mu$ indføres på temmelig oplagt manér ved reduktion til real- og imaginærdel. For at Re f og Im f skal være målelige, må f være målelig (m.h.t. den naturlige Borelstruktur på $\mathbb{C}$). Hvis Re f og Im f er integrable, siges f at være integrabel og integralets værdi er $\int f d\mu = \int \text{Re } f d\mu + i \int \text{Im } f d\mu$. I $\mathbb{C}$ slipper vi for problemer med uendelig fjerne punkter. De af hovedsætningens resultater, der ikke involverer $\mathbb{R}$'s ordning overføres uden videre til at gælde komplekse funktioner. Idet vi også bruger $\mathcal{L}(X, \mu)$ som betegnelse for de komplekse integrerbare funktioner, overføres følgende af Sætning 1's resultater med (stort set) uændret ordlyd: (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (x) og (xi). Vi overlader det til den interesserede læser at checke detaljerne.

5.4 Ækvivalens næsten overalt, definition af L_p

Lad $\mu = (X, \mu) = (X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Vi vil studere funktionsrummene $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ og $\mathcal{L}(X, \mathcal{B}, \mu)$ nærmere. Fra de foregående paragraffer ved vi, at to funktioner, der stemmer overens næsten overalt m.h.t. μ, er ligeberettigede for så vidt angår integration m.h.t. μ. De integraler, der kan dannes er ens. Det er derfor nærliggende at identificere to funktioner f og g, der stemmer overens næsten overalt.

Vi har også set, at selvom man går ud fra overalt definerede funktioner, kommer man alligevel let til at se på funktioner, der ikke er overalt definerede. Eksempler herpå er funktioner af formen $g - f$ (hvis f og g kan antage uendelige værdier), $\lim f_n$ ($(f_n(x))_{n \geq 1}$ behøver ikke være overalt konvergent) og $\sum f_n$ (rækken $\sum f_n(x)$ behøver ikke være overalt konvergent). For alle nyttige eksempler af denne art, vil de funktioner, der opstår, være defineret på en målelig mængde X_0, så $\complement X_0$ er en μ-nulmængde. Vi udvider derfor $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ til også at omfatte sådanne funktioner.

Definition 5.4.1 Ved $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ forstås mængden af målelige, udvidet reelle, μ-næsten overalt definerede funktioner. Præcist: $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$, hvis $f : X_0 \to \bar{\mathbb{R}}$ er målelig med $X_0 \in \mathcal{B}$ og $\mu(\complement X_0) = 0$. I $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ indfører vi relationen *lig med μ-næsten overalt,* skrevet "$=$ μ-n.o.", "$=$ n.o.$[\mu]$" eller blot "$=$ n.o." ved for $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ at vedtage, at $f = g$ μ-n.o. betyder, at der findes $B \in \mathcal{B}$, så definitionsmængderne for f og g indeholder B, så $f = g$ på B og så $\mu(\complement B) = 0$. For $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ betegner vi med $[f]_\mu$, eventuelt blot $[f]$, mængden af g så $g = f$ μ-n.o.

Sætning 5.4.1 *Relationen "$= \mu$-n.o." er en ækvivalensrelation i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ og hver ækvivalensklasse indeholder en repræsentant, der er overalt defineret. Er F en ækvivalensklasse, vil det enten gælde, at ingen funktioner $f \in F$ har et veldefineret integral m.h.t. μ eller også vil alle $f \in F$ have et veldefineret integral m.h.t. μ. I det sidste tilfælde, vil $\int f d\mu$ være det samme tal i $\bar{\mathbb{R}}$ for alle $f \in F$; desuden vil, for $A \in \mathcal{B}$, alle integralerne $\int_A f d\mu$; $f \in F$ være samme veldefinerede tal i $\bar{\mathbb{R}}$.*

Beviset er let, men kedsommelig teknik, som overlades til læseren!

Definition 5.4.2 Kvotientrummet af alle ækvivalensklasser $[f]_\mu$ i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ betegnes $[\mathcal{M}](X, \mathcal{B}, \mu)$.

Vi arbejder "på sædvanlig vis" i dette kvotientrum og vi tillader os en noget løs omgang med objekter i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ og i $[\mathcal{M}](X, \mathcal{B}, \mu)$, så det kun af sammenhængen fremgår, om vi er i det oprindelige rum eller i kvotientrummet. Vi kan understrege, at vi arbejder i kvotientrummet ved at sige, at vi arbejder "*modulo μ-nulmængder*" eller blot "*modulo nulmængder*". Denne bekvemme praksis bør være kendt fra anden matematik, vel især algebra, og sikrer at notationen og brug af nye symboler holdes nede på et acceptabelt niveau. Til en begyndelse er det dog fornuftigt at være omhyggelig og eksplicit nævne ækvivalensklasserne.

I funktionalanalysen er man interesseret i at studere funktionsrum, hvor f.eks. funktionerne er begrænsede, eller hvor funktionerne, eller en vis potens af funktionerne, er integrable. I sådanne undersøgelser er man typisk ikke interesserede i at skelne funktioner, der kun afviger fra hinanden på en nulmængde. Vi kan formalisere dette ved at se på ækvivalensklasser i kvotientrummet $[\mathcal{M}](X, \mathcal{B}, \mu)$. Lad F være en sådan ækvivalensklasse. Det giver så mening at sige, at F er integrabel. Det betyder, at $f \in F$ har endeligt integral. Dette er en tilladt definition, thi af $f \in F$, $\int f d\mu \in \mathbb{R}$ og $g \in F$ sluttes, at $\int g d\mu \in \mathbb{R}$. Integralet af F kan så indføres ved

$$\int F d\mu = \int f d\mu\,;\ f \in F.$$

Definitionen skrives også

$$\int [f]_\mu d\mu = \int f d\mu.$$

Hvis F er integrabel, kan vi vælge en repræsentant $f \in F$, så $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{B}, \mu)$, altså så f er integrabel, hvilket har den fordel, at f er overalt defineret og endelig. Bemærk, at en sådan repræsentant normalt ikke er entydigt bestemt.

For en given potens $1 \leq p < \infty$ kan vi tilsvarende interessere os for de ækvivalensklasser F, for hvilke F^p er integrabel, dvs. $\int f^p d\mu \in \mathbb{R}$ for én – og dermed for alle – $f \in F$. Enhver sådan ækvivalensklasse har en repræsentant f, der er overalt defineret, endelig og for hvilken $|f|^p$ er integrabel. Funktioner af denne type udgør mængden $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Man interesserer sig også for funktioner, der "i alt væsentligt" er begrænsede. Hermed menes, at når vi ser bort fra værdier på en nulmængde, er funktionen begrænset. Dette formaliseres ved at indføre begrebet essentielt suppremum:

Definition 5.4.3 Lad $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Vi definerer *$\mu$-essentielt supremum,* eller blot *essentielt supremum* af f, ved

$$\mathrm{ess\,sup\,f} = \mathrm{sup}\{\mathrm{t} \in \mathbb{R} \mid \mu(\{\mathrm{f} \geq \mathrm{t}\}) > 0\}.$$

Funktionen f er *μ-essentielt begrænset,* eller blot *essentielt begrænset,* såfremt $\mathrm{ess\,sup}\,|\mathrm{f}| < \infty$.

Hvis f og g tilhører samme ækvivalensklasse i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$ er det klart, at $\mathrm{ess\,sup}\,|\mathrm{f}| = \mathrm{ess\,sup}\,|\mathrm{g}|$, så funktionerne i en ækvivalensklasse er enten alle essentielt ubegrænsede eller alle essentielt begrænsede, så det giver mening at tale om en essentielt begrænset ækvivalensklasse. I en vis forstand svarer disse ækvivalensklasser til det før behandlede tilfælde, hvor vi så på potenser, men med en potens $p = \infty$.

Lad os præcisere begreberne med følgende definitioner:

Definition 5.4.4 For $1 \leq p < \infty$ betegner vi med $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{B}, \mu)$, evt. blot $\mathcal{L}_p(X, \mu)$ eller $\mathcal{L}_p(\mu)$, mængden af funktioner f, der er overalt definerede på X og endelige og for hvilke $|f|^p$ er integrabel. Og vi betegner med $L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$, evt. blot $L_p(X, \mu)$ eller $L_p(\mu)$, mængden af ækvivalensklasser i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$, der har en repræsentant i $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{B}, \mu)$. For funktioner i $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ indfører vi *p-normen* ved

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu} \tag{5.14}$$

og for $F \in L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ sætter vi

$$\|F\|_p = \|f\|_p\,;\ f \in F. \tag{5.15}$$

For $p = \infty$ betegner vi tilsvarende med $\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ mængden af overalt definerede, endelige og essentielt begrænsede funktioner, og med $L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ betegnes mængden af ækvivalensklasser i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$, der har en repræsentant i $\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$. For funktioner i $\mathcal{L}_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ indfører vi *∞-normen* ved

$$\|f\|_\infty = \mathrm{ess\,sup}\,|\mathrm{f}| \tag{5.16}$$

og for $F \in L_\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ sætter vi

$$\|F\|_\infty = \|f\|_\infty\,;\ f \in F. \tag{5.17}$$

Som tidligere antydet, er det tit ulideligt at slæbe rundt på ækvivalensklasserne. Man kan således skrive definitionen (5.15) på den strengt taget ukorrekte form

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu}\,;\ f \in L_p(X, \mu).$$

Så er det underforstået, at f på venstresiden egentlig står for en ækvivalensklasse og f på højresiden for en funktion i denne ækvivalensklasse. Denne og tilsvarende løs omgang med begreberne er kun mulig når det er ligegyldigt, hvilke repræsentanter, der vælges.

For $p = \infty$, kan vi tilsvarende skrive

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |\mathrm{f}|\,;\ \mathrm{f} \in \mathrm{L}_\infty(\mathrm{X}, \mu).$$

Sætning 5.4.2 (basale resultater om $\mathcal{L}_p$-rummene) *Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og $1 \le p \le \infty$. Da gælder*

(i) *$\mathcal{L}_p(X, \mu)$ er et vektorrum*

(ii) *$\mathcal{L}_p(X, \mu)$ er med $f \curvearrowright \|f\|_p$ et seminormeret vektorrum, dvs. $\|f\|_p \ge 0$, $\|af\|_p = |a|\,\|f\|_p$ for $a \in \mathbb{R}$ og for $f \in \mathcal{L}_p(X, \mu)$, $g \in \mathcal{L}_p(X, \mu)$ gælder trekantsuligheden, her kaldet* Minkowski's ulighed: $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

(iii) *for $f \in \mathcal{L}_p(X, \mu)$ gælder $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ n.o.*

(iv) *Lad $q \in [1, \infty]$ være defineret ved ligningen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. For $f \in \mathcal{L}_p(X, \mu)$ og $g \in \mathcal{L}_q(X, \mu)$ gælder da* Hölders ulighed:

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \tag{5.18}$$

(v) *Er $\mu(X) < \infty$ og $1 \le p' \le p'' \le \infty$, vil $\mathcal{L}_{p''}(X, \mu) \subseteq \mathcal{L}_{p'}(X, \mu)$. Hvis $\mu(X) = 1$ gælder tillige $\|f\|_{p'} \le \|f\|_{p''}$ for $f \in \mathcal{L}_{p''}(X, \mu)$.*

Dette resultat, der udover målteoretiske overvejelser kun kræver forholdsvis elementære overvejelser, bevises i kurset i funktionalanalyse. For fuldstændighedens skyld anføres et bevis i Appendix III. Her noterer vi blot, at (iii) følger af nulkriteriet for integralet og at (i) og (ii) let eftervises i tilfældene $p = 1$ og $p = \infty$.

Sætning 5.4.3 (basale resultater om L_p-rummene) *Lad igen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og $1 \le p \le \infty$. Da er $L_p(X, \mu)$ et normeret vektorrum, dvs. p-normen er en seminorm så implikationen $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ gælder for $f \in L_p(X, \mu)$. Desuden gælder Hölders ulighed (5.18) og hvis $\mu(X) < \infty$ og $1 \le p' \le p'' \le \infty$, vil $L_{p''}(X, \mu) \subseteq L_{p'}(X, \mu)$.*

Dette vises let ud fra Sætning 1. Bemærk, at den væsentlige egenskab, der skiller L_p-rummene fra $\mathcal{L}_p$-rummene, nemlig implikationen $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ naturligvis skal forstås i $L_p(X, \mu)$. Så konklusionen $f = 0$ refererer til 0-ækvivalensklassen i $L_p(X, \mu)$, der er klassen med 0-funktionen som repræsentant. Endelig bør vi måske også pointere, at den algebraiske struktur (sum og skalar produkt) naturligvis refererer til klasserne og indføres ved regning med repræsentanter.

Vi skal i næste kapitel vende tilbage til $\mathcal{L}_p$- og L_p-rummene og etablere en vigtig egenskab, fuldstændighed.

Til slut bemærkes, at man uden vanskelighed overfører $\mathcal{L}_p$- og L_p-rummenes teori til at gælde komplekse funktioner. Udgangspunktet er så det komplekse $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$-rum, hvor funktionerne tillades at antage komplekse værdier (som før behøver de ikke være overalt definerede). $\mathcal{L}_p$- og L_p-rummene indføres ved at gentage, hvad vi sagde før med den ene ændring, at $\mathbb{R}$ skiftes ud med $\mathbb{C}$. Sætningerne 1 og 2 gælder med uforandret ordlyd.

Opgaver til Kapitel V

Opgave 1. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum.

(i). Vis, at integralet $I_\mu : \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}) \to [0, \infty]$ er entydigt bestemt ved følgende krav:

1° I_μ har den rigtige værdi for simple funktioner,

2° I_μ er monoton,

3° $\forall f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}) : I_\mu(f \wedge n) \to I_\mu(f)$,

4° $\forall f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}) : I_\mu(f \cdot 1_{\{f \geq \varepsilon\}}) \to I(f)$.

Vejledning. Eftervis (5.2). Udnyt 3° til at reducere til tilfældet, hvor f er begrænset. Man kan gerne antage $0 \leq f \leq 1$. Udnyt 4° til yderligere at reducere, så det også kan antages, at for et $\varepsilon > 0$ antager f ikke værdier i intervallet $]0, \varepsilon[$. Udnyt nu, at for $n \geq 1/\varepsilon$, vil

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} 1_{\{f \geq \frac{\nu}{n}\}} \leq f \leq \frac{1}{n} 1_{\{f \geq \varepsilon\}} + \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} 1_{\{f \geq \frac{\nu}{n}\}}.$$

(ii). Vis, at såvel 3° som 4° er nødvendige i resultatet ovenfor. *Vejledning.* Se på følgende to eksempler: a: $X = \{0, 1\}$; $\mu = \varepsilon_0$; $I_\mu(f) = f(0)$, hvis $f(1) < \infty$ og $I(f) = \infty$, hvis $f(1) = \infty$. b: $X = \mathbb{N}$; $\mu =$ tællemål; $I_\mu(f) =$ det sædvanlige, hvis f er simpel og $I_\mu(f) = \infty$ ellers, dvs. hvis $f(x) > 0$ for uendelig mange x.

(iii). Vis, at hvis $\mu(X) < \infty$, så karakteriserer 1° og 2° integralet på $\mathcal{M}_b^+(X, \mathcal{B}) = \{f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B}) \mid f \text{ begrænset}\}$.

Opgave 2. Vis, at $1_\mathbb{Q}$ ikke er Riemannintegrabel over $[0, 1]$, men at denne funktion er Lebesgueintegrabel over $[0, 1]$.

Opgave 3. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum, så enhver singleton er målelig med mål 0. Hvad kan man så sige vedrørende integrabilitet af funktioner på X, der er 0 på en co-tællelig mængde?

Opgave 4. Udled Lebesgue's sætning om monoton konvergens ud fra Fatou's lemma.

Opgave 5. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum. Udvid Sætning 2.3 ved at vise, at ethvert mål, der har tæthed m.h.t. μ, har en tæthed der er entydigt bestemt μ-n.o., hvis og kun hvis μ er endeligt funderet (se Opgave IV.6).

Opgave 6. Lad $\mu = (X, \mu) = (X, \mathcal{B}, \mu)$ være et mål, f en funktion i $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ og betegn med φ målet $f d\mu$. Bevis, at for en funktion $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ gælder ækvivalensen

$$g \in \mathcal{L}(X, \varphi) \Leftrightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}(X, \mu)$$

og endvidere er

$$\int g d\varphi = \int f g d\mu$$

i den stærkest tænkelige forstand (enten er ingen af integralerne veldefinerede eller også er de begge veldefinerede i $\bar{\mathbb{R}}$ og de to integraler er ens).

Opgave 7. I Sætning 5.3.1, (ii) omtalte vi absolut integrabilitet uden egentlig at definere det nærmere. Naturligvis (?) refererer det til integrabilitet af $|f|$. Vis, at begrebet faktisk omfatter det velkendte begreb for uendelige rækker. Diskutér også, at for vores integralbegreb, Lebesgueintegralet, er der ikke noget, der svarer til betinget konvergens af rækker.

Opgave 8. Et centralt eksempel på $\mathcal{L}_p$ (og L_p-) rummenes teori fremkommer, når det underliggende mål er Lebesguemålet λ på $\mathbb{R}$. Vis ved passende eksempler, at for $1 \le p < q \le \infty$ vil der hverken gælde $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \lambda) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathbb{R}, \lambda)$ eller $\mathcal{L}_q(\mathbb{R}, \lambda) \subseteq \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \lambda)$.

Opgave 9. Hvis f er en positiv integrabel funktion på et målrum X og μ er et mål med $\mu(X) = \infty$, så vil $\int \frac{1}{f} d\mu = \infty$. Vis det!

Vejledning. For $s > 0$ er $s + s^{-1} \ge 1$.

Opgave 10. Idet "dx" refererer til integration m.h.t. Lebesguemålet på $\mathbb{R}$, skal man for en ikke-negativ målelig funktion f på $\mathbb{R}_+$ undersøge, om

$$\lim_{t \to \infty} \int_1^t f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx$$

og

$$\lim_{t \to 0, t > 0} \int_t^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Opgave 11. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et endeligt målrum og $(f_n)_{n \ge 1}$ en følge af målelige ikke-negative funktioner, som konvergerer uniformt mod funktionen f. Vis, at $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Spiller det nogen rolle for resultatet, at funktionerne er antaget ikke-negative?

Opgave 12. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og lad $(f_n)_{n \ge 1}$ være en punktvis konvergent følge af funktioner $f_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$ med grænsefunktion f. Antag, at $\int f d\mu < \infty$ og at $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$. Bevis, at så vil $\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$ for alle $A \in \mathcal{B}$. Vis ved et eksempel, at forudsætningen $\int f d\mu < \infty$ ikke kan undværes for dette resultat.

Opgave 13. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et endeligt målrum og $(A_i)_{i \in I}$ en vilkårlig familie af målelige mængder. Hvis I er numerabel, er det klart, at A_i'erne har et supremum i $\mathcal{B}$, nemlig $\bigcup_{i \in I} A_i$. Hvis I er overtællelig gælder dette naturligvis ikke. Der gælder imidlertid, at såfremt vi regner "modulo nulmængder" findes supremum af A_i'erne altid. Præcist: Der findes $A \in \mathcal{B}$ således, at $\mu(A_i \setminus A) = 0$ (altså $A_i \subseteq A$ n.o.= for

$i \in I$ og således, at $\mu(A \setminus A') = 0$ (altså $A \subseteq A'$ n.o.) for enhver mængde $A' \in \mathcal{B}$ for hvilken $\mu(A_i \setminus A') = 0$ (altså $A_i \subseteq A'$ n.o.) for $i \in I$. Bevis dette. *Vejledning:* Se på en “stor” mængde B der, modulo nulmængder, er disjunkt med enhver mængde A_i. Sæt $A = \complement B$.

Bemærkning. Resultatet udvides let til at gælde i et σ-endeligt målrum. Man kan også udvide resultatet fra mængder til funktioner. Så vil man se, at $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ er et fuldstændigt gitter (supremum og infimum eksisterer i dette rum for vilkårlige familier af funktioner for hvilke essentielt supremum er hhv. opadtil eller nedadtil begrænset). Den energiske opgaveløser kan faktisk udbygge ræsonnementet ovenfor til at vise dette fine resultat.