Kapitel 6

Mål og Integral, udvalgte problemstillinger

De forudgående kapitler har givet os de basale begreber og værktøjer i hænde. Rustet med dem kan vi tage en lang række problemer op. Udvalget er især gjort med henblik på at tilfredsstille behovet i funktionalanalyse, sandsynlighedsregning og statistik, men i øvrigt er resultaterne nyttige for en række andre områder af den matematiske analyse. Udover anvendelsesaspektet tager vi også problemer op, der er vigtige for den videre udvikling af mål- og integralteorien selv. Et lidt større problemkompleks udskydes til næste kapitel.

6.1 Konvergens af målelige funktioner

Der er tre former for konvergens af målelige funktioner, der især er af interesse i målteorien og dens anvendelser, dels konvergens næsten overalt, som vi allerede har indført, dels konvergens i mål og endelig konvergens i middel. De to sidste begreber indføres på følgende måde:

Definition 6.1.1 Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og f_n; $n \geq 1$ og f målelige reelle funktioner. Vi siger, at f_n *konvergerer mod* f *i mål,* såfremt det for alle $\varepsilon > 0$ gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.$$

Hvis funktionerne f_n; $n \geq 1$ og f tilhører $\mathcal{L}_p$, hvor $1 \leq p \leq \infty$, siger vi, at f_n *konvergerer i* $\mathcal{L}_p$ *mod* f, eller at f_n *konvergerer mod* f *i* p*-middel,* såfremt $\|f_n - f\|_p \to 0$. Er $p = 1$, tales om *konvergens i middel* og er $p = 2$, tales om *konvergens i kvadratisk middel* (for $p = \infty$, se dog bemærkning nedenfor).

Bemærkninger. Vi vil i det følgende normalt antage, at de betragtede funktioner er overalt definerede og endelige, selv om konvergens næsten overalt og konvergens i mål kan defineres for funktioner i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$. Alle indførte begreber respekterer den naturlige ækvivalensrelation i $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)$. F.eks. gælder, at hvis $g_n = f_n$ n.o. for $n \geq 1$ og $g = f$ n.o. så vil $f_n \to f$ i mål, hvis og kun hvis $g_n \to g$ i mål. I definitionen fastlagde vi konvergens i $\mathcal{L}_p$. Det er klart, at vi på lignende måde kan indføre konvergens i L_p (via repræsentanter). For $p = \infty$ taler vi nu ikke om konvergens i "∞-middel", men siger, såfremt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, at f_n *konvergerer uniformt mod* f, n.o. Terminologien skyldes, at $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, hvis og kun hvis, der findes en μ-nulmængde A, så $f_n \to f$, uniformt på $\complement A$. Overvej!

EKSEMPEL 1. Konvergens i mål medfører ikke konvergens i middel. Se nemlig på funktionsfølgen i Figur 14, hvor vi har Lebesguemålet på $[0, 1]$ i tankerne. Bemærk, at funktionsfølgen konvergerer næsten overalt.

Figur 14

EKSEMPEL 2. Konvergens i mål medfører heller ikke konvergens næsten overalt, vi kan endda risikere divergens overalt, se Figur 15. Bemærk, at her vil funktionsfølgen konvergere i middel.

Figur 15

EKSEMPEL 3. Konvergens i mål behøver ikke at medføre nogen af konvergensformerne, konvergens næsten overalt eller konvergens i middel: Se på eksemplet ovenfor og multiplicer funktionerne dér med passende konstanter. $\square$

Sætning 6.1.1 *Lad* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *være et målrum og betragt konvergens i mål, konvergens næsten overalt og konvergens i* $\mathcal{L}_p$.

(i) *For alle konvergensbegreberne er grænsefunktionen entydigt bestemt på nær en* μ*-nulmængde;*

(ii) *Konvergens i middel, mere generelt konvergens i* $\mathcal{L}_p$ *for et* $p \in [1, \infty]$, *medfører konvergens i mål;*

(iii) *Såfremt* μ *er et endeligt mål, medfører konvergens næsten overalt konvergens i mål;*

(iv) *Konvergens i mål medfører konvergens n.o. for en delfølge.*

(v) *Hvis* f_n *konvergerer mod* f *n.o. og konvergensen er domineret af en integrabel funktion* $(\exists g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{B}, \mu) \forall n \geq 1 : |f_n| \leq g)$, *så vil* f_n *konvergere i middel, altså i* $\mathcal{L}_1$, *mod* f.

Bevis. (i): Vi skal altså vise, at såfremt $f_n \to f$ og $f_n \to g$ (for et af de betragtede konvergensbegreber), så vil $f = g$ n.o. Er konvergensbegrebet "konvergens i mål", ser vi af uligheden

$$\mu\left(\{|f-g| \geq \varepsilon\}\right) \leq \mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon/2\}\right) + \mu(\{|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}),$$

at $f = g$ n.o. For "konvergens n.o.— er resultatet banalt. For "konvergens i $\mathcal{L}_p$" kan vi enten ræsonnere direkte (let!) eller påberåbe os resultatet af (ii).

(ii): For $p = \infty$ ses dette let. For $p = 1$ kan vi udnytte den ofte nyttige ulighed

$$\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| d\mu \geq \int_{\{f_n - f| \geq \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu \geq \varepsilon \mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right)$$

og for $1 \leq p < \infty$ kan vi udnytte en oplagt generalisation af denne ulighed. Overvej.

(iii), (iv): Lad os først, uden at forudsætte $\mu(X) < \infty$, notere, at der gælder biimplikationerne

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ n.o.} \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\left(\complement \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \{|f_m - f| < \varepsilon\}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \ \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0. \end{aligned}$$

Her kan normalt kun fortsættes med følgende implikation:

$$\cdots \Leftarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \tag{6.1}$$

men hvis $\mu(X) < \infty$, gælder der biimplikation her (udnyt reglen om approksimation udefra, Sætning 4.3.1, (vi)). Nu er (iii) let at vise: Thi med biimplikation i (6.1) kan vi af $f_n \to f$ n.o. slutte, at $\forall \varepsilon > 0 : \lim \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon) = 0$.

Ud fra (6.1) er det også let at vise (iv). Vi skal blot sikre os, at (6.1) gælder efter en (kraftig) udtynding. Vi kan tillade os at antage, at

$$\forall n \geq 1 : \mu\left(\left\{|f_n - f| \geq 2^{-n}\right\}\right) \leq 2^{-n}$$

– denne egenskab kan jo opnås for en delfølge. Så er, for $\varepsilon > 0$ og $n \geq \log_2(1/\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{m\geq n} \{|f_m - f| \geq \varepsilon\}\right) &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu\left(\{|f_m - f| \geq \varepsilon\}\right) \\ \leq \quad \sum_{m=n}^{\infty} \mu\left(\left\{|f_m - f| \geq 2^{-m}\right\}\right) &\leq \sum_{m=n}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Vi ser at (6.1) gælder og slutter, som ønsket, at $f_n \to f$ n.o. Egenskaben (v) er blot en gentagelse af Lebesgue's sætning om domineret konvergens (Sætning 5.3.1, (x)). $\square$

I de lige beviste resultater om konvergens af funktioner, gik vi hele tiden ud fra at grænsefunktionen var kendt. Som vi ved fra lignende situationer – mest fundamentalt vedrørende konvergens i $\mathbb{R}$ – er det ofte af central betydning, at man kan slutte sig til eksistens af grænseobjektet, her grænsefunktionen, uden eksplicit at pege på det. For $\mathcal{L}_p$- og L_p-rummene er denne problemstilling særlig vigtig. Og i disse rum er situationen faktisk analog til det, vi kender så godt fra $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ og $\mathbb{C}^n$. Der gælder altså, at Cauchy-følger i $\mathcal{L}_p$ eller L_p er konvergente. Dette vigtige resultat vil vi nu vise. Først bemærkes, at da $\mathcal{L}_p$ og L_p er hhv. pseudometriske og metriske rum, er det klart, hvad der menes med Cauchy-følger $(f_n)_{n\geq 1}$ i disse rum. Det betyder, at $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ for $n, m \to \infty$.

Sætning 6.1.2 (Fischer's fuldstændighedssætning) *Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ være et målrum og $1 \leq p \leq \infty$. Da er $\mathcal{L}_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ og $L_p(X, \mathcal{B}, \mu)$ fuldstændige rum, dvs. enhver Cauchy-følge er konvergent.*

Bevis. Resultatet for L_p følger af resultatet for $\mathcal{L}_p$ ved regning med repræsentanter. Vi viser defor kun resultatet for $\mathcal{L}_p$. For $p = \infty$ er dette let: Hvis $a_{nm} = \|f_n - f_m\|_\infty \to 0$, kan vi bestemme $X_0 \in \mathcal{B}$ så $|f_n(x) - f_m(x)| \leq a_{nm}$ for alle $x \in X_0$ og således, at $\complement X_0$ er en μ-nulmængde. Så findes f på X_0, så $f_n \to f$ uniformt på X_0. Sættes $f = 0$ udenfor X_0, er f (nu betegnende den udvidede funktion) en funktion i $\mathcal{L}_\infty$ og $\|f_n - f\|_\infty \leq \sup\{a_{nm} | m \geq n\}$. Derfor vil $f_n \to f$ i $\mathcal{L}_\infty$.

Lad os dernæst antage $p = 1$. Vi skriver $\|\cdot\|$ i stedet for $\|\cdot\|_1$ i det følgende.

Først bemærker vi – og det har ikke så meget med $\mathcal{L}_1$ at gøre, men er en observation, der gælder vilkårlige seminormerede vektorrum – at blot vi kan vise, at "absolut konvergens (for rækker) medfører konvergens", så følger fuldstændigheden. Præcist: Hvis vi af $\sum_1^\infty \|f_n\| < \infty$ kan slutte, at der findes $s \in \mathcal{L}_1$, så $\|s_n - s\| \to 0$, hvor $s_n = f_1 + \cdots + f_n$; $n \geq 1$, altså så $\sum_1^\infty f_n = s$, så må $\mathcal{L}_1$ være fuldstændigt. For at indse dette, antag "absolut konvergens $\Rightarrow$ konvergens" og lad $(f_n)_{n\geq 1}$ være en Cauchy-følge. Så findes en delfølge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ således, at $f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots$ er absolut konvergent i $\mathcal{L}_1$ og dermed konvergent, dvs. $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ er konvergent, lad os sige med grænsefunktion s. Af $\|f_n - s\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - s\|$ ses så, at $f_n \to s$.

Hermed har vi reduceret problemet til at vise, at absolut konvergens medfører konvergens i $\mathcal{L}_1$. Antag derfor, at $\sum_1^\infty \|f_n\| < \infty$ for en følge af funktioner i $\mathcal{L}_1$. Af Beppo-Levi's sætning, Sætning 5.3.1, (xi), ses, at $s(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$ eksisterer næsten overalt og definerer en funktion i $\mathcal{L}_1$ (evt. efter justeringer på en nulmængde). Vi finder så, at $\sum_1^\infty f_n = s$, altså at $s_n \to s$ i $\mathcal{L}_1$ med $s_n = \sum_1^n f_k$; $n \geq 1$, idet

$$\|s - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Hermed er beviset ført for $\mathcal{L}_1$.

For det generelle tilfælde $1 \leq p < \infty$ er det ikke helt lige-ud-ad-landevejen at generalisere ovenstående. Man står sig ved at gå lidt længere tilbage og tænke over selve beviset for Beppo-Levi's sætning. Se evt. Opgave 4. $\square$

6.2 Nye mål ud fra gamle

Under denne overskrift har vi allerede set på nogle muligheder: *konstant gange mål* og *sum af mål* (Sætning 4.4.1), *fuldstændiggørelse af mål* (Sætning 4.5.1) og i den forbindelse indførte vi begreberne *udvidelse* hhv. *indskrænkning af mål* (Definition 4.5.2); endelig har vi set på *ubestemt integral* (Sætning 5.2.3). Der er imidlertid flere interessante og nærliggende muligheder, vi endnu ikke har set på. Det tager vi op nu.

Først ser vi på *restriktion af mål.* Er $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et målrum og X_0 en målelig delmængde af X, kan vi se på *restriktionen af μ til X_0*, også kaldet *sporet af μ på X_0*. Det er målet $\mathrm{tr}_{\mathrm{X_0}}(\mu)$ på Borelrummet $(X_0, \mathcal{A}_0)$, hvor $\mathcal{A}_0 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X_0}}(\mathcal{A})$, (se Definition 2.6.1) givet ved

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{X_0}}(\mu)(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})\,; \quad \mathrm{A} \in \mathcal{A}_0 \tag{6.2}$$

Da vi har forudsat X_0 målelig, vil $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, så definitionsligningen (6.2) er problemfri. Det er også klart, at $\mathrm{tr}_{\mathrm{X_0}}(\mu)$ virkelig er et mål på $(X_0, \mathcal{A}_0)$. Lad os sætte $\mu_0 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X_0}}(\mu)$. Af (6.2) ses, at μ_0 blot er restriktionen af μ til $\mathcal{A}_0$. Er f en målelig funktion på X og betegner vi med f_0 restriktionen til X_0, er $\int_{X_0} f d\mu = \int f_0 d\mu_0$.

Af og til kan det være hensigtsmæssigt at betragte μ_0 som et mål på X, ikke blot på X_0. I så fald defineres $\mu_0(A) = \mu(X_0 \cap A)$; $A \in \mathcal{A}$. Så er $\int f d\mu_0 = \int_{X_0} f d\mu$ for enhver målelig funktion på X. Hvis μ er et sandsynlighedsmål og $\mu(X_0) > 0$, er $(\mu(X))^{-1}\mu_0$ det *betingede sandsynlighedsmål givet X_0*.

I visse tilfælde (se Opgave 7) kan man definere et fornuftigt "spor" af μ på mængder X_0, der ikke behøver være målelige. Det kan der komme teoretisk interessante (patologiske) mål ud af, se Eksempel 1 i næste §.

Langt mere spændende og vigtigere end ovenstående konstruktion er de to konstruktioner, vi skal koncentrere os om i resten af §'en, billedmål og produktmål.

Definition 6.2.1 Hvis $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et målrum, $(Y, \mathcal{B})$ et Borelrum og $\varphi : X \to Y$ en målelig afbildning, så forstår vi ved *billedmålet af μ under φ*, det mål på Y, betegnet $\varphi(\mu)$, der er givet ved

$$(\varphi(\mu))(B) = \mu\left(\varphi^{-1}(B)\right)\,; \quad B \in \mathcal{B}. \tag{6.3}$$

Er μ et sandsynlighedsmål, kaldes $\varphi(\mu)$ *fordelingen* af φ.

Er $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ målrum og $\varphi : X_1 \to X_2$ en målelig afbildning, siges φ at være *målbevarende* såfremt $\mu_2 = \varphi(\mu_1)$.

Bemærkninger. Notation for billedmål er ikke helt fastlagt standard. Nogle forfattere bruger betegnelsen $\mu\varphi^{-1}$.

Både i den generelle målteori og i anvendelserne spiller billedmål en fremtrædende rolle. I sandsynlighedsregning er begrebet særlig centralt, idet et stokastisk element som φ i definitionen anses for fuldt bestemt i sandsynlighedsteoretisk henseende gennem fordelingen $\varphi(\mu)$.

Det naturlige isomorfibegreb for målrum udtrykkes ved de indførte begreber: Målrummene $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ er *målteoretisk isomorfe* såfremt der findes en Borel-isomorfi $\varphi : X_1 \to X_2$, så både φ og φ^{-1} er målbevarende. Vi skal imidlertid ikke studere dette isomorfibegreb nærmere i disse noter.

Endelig bemærker vi, at det i visse situationer er nok at checke (6.3) for visse B'er for at kunne slutte, at man har med billedmålet at gøre. Præcist: *Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \eta)$ være målrum, lad $\mathcal{B}_0$ være et frembringersystem for $\mathcal{B}$ og lad $\varphi : X \to Y$ være målelig. Hvis det for alle $B \in \mathcal{B}_0$ gælder, at $\eta(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ og hvis $\mu(X) = \eta(Y) < \infty$, så må η være billedmålet: $\eta = \varphi(\mu)$.* Beviset overlades til læseren.

Lad $\varphi : X \to Y$ være målelig som angivet i definitionen og sæt $\eta = \varphi(\mu)$. Definitionsligningen (6.3) kan skrives på formen

$$\int 1_B d\eta = \int 1_{\varphi^{-1}(B)} d\mu$$

eller, idet $1_{\varphi^{-1}(B)} = 1_B \circ \varphi$,

$$\int 1_B d\eta = \int (1_B \circ \varphi) d\mu. \tag{6.4}$$

Det er så nærliggende at udvide (6.4) fra indikatorfunktioner af målelige mængder i Y til vilkårlige målelige funktioner. Dette er faktisk let, og man finder:

Sætning 6.2.1 (integration m.h.t. billedmål) *Lad $\varphi : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}, \eta)$ være målbevarende, dvs. η er billedmålet af μ under φ. For enhver målelig reel funktion f på Y gælder da*

$$\int f d\eta = \int (f \circ \varphi) d\mu \tag{6.5}$$

i den stærkest tænkelige forstand, dvs. venstre-siden er et veldefineret tal i $\bar{\mathbb{R}}$, hvis og kun hvis det samme gælder om højresiden, og i så fald stemmer de to udtryk overens. Specielt gælder biimplikationen

$$f \in \mathcal{L}(Y, \eta) \Leftrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{L}(X, \mu).$$

Bevis. Ses på afbildningen $f \curvearrowright \int (f \circ \varphi) d\mu$ for funktioner i $\mathcal{M}^+(Y, \mathcal{B})$, følger det af Hovedsætning 5.1.1, at (6.5) gælder for sådanne funktioner. Overvej!

Hvis $f \in \mathcal{M}(Y, \mathcal{B})$, er venstre-siden i (6.5) givet ved $\int f^+ d\eta - \int f^- d\eta$ (hvis veldefineret) og højre-siden er givet ved $\int (f \circ \varphi)^+ d\mu - \int (f \circ \varphi)^- d\mu$ (hvis veldefineret). Resultatet udledes nu af det allerede viste om ikke-negative målelige funktioner, idet vi bemærker, at $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ og $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$. □

Bemærkninger. Sætningen udvides umiddelbart til også at gælde målelige funktioner med komplekse værdier. Resultatet er centralt i sandsynlighedsregningen, idet det viser, hvorledes middelværdien af en funktion af et stokastisk element (højre-siden i (6.5)) kan udregnes ved at integrere funktionen m.h.t. fordelingen af det stokastiske element (venstre-siden i (6.5)).

Øvelse 1. Undersøg indholdet af sætningen, hvis φ er den identiske afbildning af X på sig selv.

Vi vil dernæst studere produktmål. Vi ser først omhyggeligt på produkt af to mål. Udvidelsen til produkt af endelig mange mål er så ligetil, mens tilfældet med produkt af uendelig mange mål (og beslægtede konstruktioner) kræver nye overvejelser, som vi kun i nogen udstrækning vil behandle.

Definition 6.2.2 Lad $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ være målrum. Vi siger, at μ er et *produktmål* af μ_1 og μ_2, hvis $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$ er et målrum med $X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ og

$$\mu(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1) \cdot \mu_2(B_2) \tag{6.6}$$

for ethvert måleligt rektangel $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$.

Bemærkninger. Vi minder om definitionen af produkt-Borelstrukturen $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, Definition 2.6.2. Det vigtigste specialtilfælde af definitionen ovenfor fremkommer, når $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, men i visse situationer er det naturligt at betragte en større Borelstruktur (se næste §). Definitionen er af central betydning i sandsynlighedsregningen, idet den særlige produktegenskab (6.6) afspejler uafhængighed som det defineres i sandsynlighedsregningen.

Øvelse 2. Antag, at μ er et produktmål af μ_1 og μ_2 og at μ_1 og μ_2 er sandsynlighedsmål. Vis, at så er projektionsafbildningerne $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ og $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ målbevarende. Illustrér ved eksempler, at det meget langt fra er nok om μ at forlange, at π_1 og π_2 er målbevarende for at kunne slutte, at μ er et produktmål af μ_1 og μ_2 (tag f.eks. $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) = (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) = [0, 1]$ med Lebesguemål).

Det er muligt at udnytte sætningerne i §4.6 til konstruktion af produktmål. Vi vælger dog at gå mere klassisk til værks og udnytter integralet til direkte at nedskrive en formel for et produktmål. Det mål, vi får konstrueret er entydigt bestemt på produkt-Borelstrukturen. Teknisk set er det nødvendigt med en endelighedsbetingelse på faktormålene:

Sætning 6.2.2 (eksistens og entydighed af produktmål) *Lad* $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ *og* $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ *være* σ*-endelige målrum. Der findes da et entydigt bestemt produktmål* μ *af* μ_1 *og* μ_2 *defineret på* $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Bevis. Entydigheden følger af Sætning 4.1.2. Lad nemlig $\mathcal{B}_1' = \{B \in \mathcal{B}_1 \mid \mu_1(B) < \infty\}$ og tilsvarende $\mathcal{B}_2' = \{B \in \mathcal{B}_2 \mid \mu_2(B) < \infty\}$ og definer $\lambda : \mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2' \to [0, \infty[$ ved $\lambda(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1) \cdot \mu_2(B_2)$; $B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2'$. Så er ethvert produktmål en udvidelse af λ. Af Sætning 4.1.2 følger så, at et produktmål er entydigt bestemt på $\sigma(\mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2')$, men denne σ-algebra er netop $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ i henhold til Sætning 2.6.2 (thi $\sigma(\mathcal{B}_1') = \mathcal{B}_1$ og $\sigma(\mathcal{B}_2') = \mathcal{B}_2$ da μ_1 og μ_2 er σ-endelige).

For at vise eksistensen lader vi os vejlede af en figurbetragtning (Figur 16) og

Figur 16

tidligere beregning af arealer ved opdeling i strimler (eller beregning af volumener ved opdeling i skiver). Vi betragter derfor udtrykket

$$\mu(B) = \int \mu_2(B_x) d\mu_1(x) \, ; \quad B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \tag{6.7}$$

og ønsker at vise, at μ defineret på denne måde er et produktmål (se §2.6 vedrørende notationen B_x for x-sektionen af $B \subseteq X_1 \times X_2$).

Definitionen (6.7) giver ikke umiddelbart mening. Vi må vise, at funktionen $x \curvearrowright \mu_2(B_x)$; $x \in X_1$ er målelig (ligger i $\mathcal{M}^+(X_1, \mathcal{B}_1)$) for enhver mængde $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. Er dette først vist, er det klart, at μ definerer et produktmål af μ_1 og μ_2. Overvej. Hele problemet er således reduceret til et målelighedsproblem.

Lad $\mathcal{S}$ være brolægningen af $S \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ så $x \curvearrowright \mu_2(S_x)$ er målelig på X_1. Det er klart, at $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{S}$. Overvej! Desuden ses let, at $\mathcal{S}$ er $(\sum c)$-lukket, thi er $(S_n)_{n \geq 1}$ parvis disjunkte mængder fra $\mathcal{S}$, er $(\cup S_n)_x = \cup (S_{n_x})$, en disjunkt forening, så

$$\mu_2\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)_x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2\left((S_n)_x \right).$$

Dermed er $x \curvearrowright \mu_2((\cup S_n)_x)$ en sum af $\mathcal{M}^+(X_1, \mathcal{B}_1)$-funktioner og dermed selv en sådan funktion. Det er mindre oplagt, at $\mathcal{S}$ er $(\complement)$-lukket. Hvis $\mu_2(X_2) < \infty$ er dette dog let, idet

$$\mu_2\left((\complement S)_x \right) = \mu_2\left(\complement (S_x) \right) = \mu_2(X_2) - \mu_2(S_x)$$

udnyttes. En anvendelse af Sætning 2.3.1, 4° viser så – i tilfældet $\mu_2(X_2) < \infty$ –, at $x \curvearrowright \mu_2(S_x)$ er målelig for alle $S \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Bestem nu en stigende følge $E_n \uparrow X_2$ af mængder i $\mathcal{B}_2$ med endeligt mål. Lad $S \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. Anvendes det viste resultat på de endelige mål $B \curvearrowright \mu_2(E_n \cap B)$; $B \in \mathcal{B}_2$ ses, at det for hvert $n \geq 1$ gælder, at funktionen $x \curvearrowright \mu_2(E_n \cap S_x)$ tilhører $\mathcal{M}^+(X_2, \mathcal{B}_2)$. Ved at se på grænsefunktionen for denne følge af funktioner ses, at $x \curvearrowright \mu_2(S_x)$ er målelig. Hermed er den ønskede målelighedsegenskab bevist og som påpeget, checkes det så let, at (6.7) – der nu giver god mening – definerer et produktmål. $\square$

Det entydigt bestemte mål i den lige beviste sætning kaldes *produktmålet* af μ_1 og μ_2 og betegnes $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Lad os samle de vigtigste to resultater om produktmål:

Sætning 6.2.3 (Hovedsætning om produktmål) *Lad $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ være σ-endelige målrum og lad $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ betegne produktmålet. Da gælder:*

(i) (Tonelli's sætning). *For en målelig funktion $f \in \mathcal{M}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ er afbildningen $x_1 \curvearrowright \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ en målelig funktion i $\mathcal{M}^+(X_1, \mathcal{B}_1)$ og*

$$\int f d\mu = \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1). \tag{6.8}$$

(ii) (Fubini's sætning) *Lad $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu)$. Så vil x_1-sektionen f_{x_1} defineret ved $x_2 \curvearrowright f(x_1, x_2)$ tilhøre $\mathcal{L}(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ for næsten alle x_1 (dvs. μ_1-n.o.) og*

$$\int f d\mu = \int \left(\int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1). \tag{6.9}$$

Bevis. (i): Lad $f \in \mathcal{M}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$. For fastholdt x_1 er snit-funktionen $f_{x_1} : x_2 \curvearrowright f(x_1, x_2)$ målelig, idet den kan fås ved sammensætningen af $x_2 \curvearrowright (x_1, x_2)$ og f.

Er f en indikatorfunktion: $f = 1_B$ med $B \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$, gælder påstandene i (i); det var jo kernen i beviset for Sætning 2 (bemærk, at funktionen $x_1 \curvearrowright \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ så er funktionen $x_1 \curvearrowright \mu_2(B_{x_1})$).

Det er så let at se, at påstandene i (i) gælder en vilkårlig ikke-negativ simpel funktion på $X_1 \times X_2$, altså en vilkårlig $\mathcal{S}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$-funktion. Overvej!

Lad nu $f \in \mathcal{M}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ være vilkårlig. Bestem $(s_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{S}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$, så $s_n \uparrow f$. Vi bemærker, at for hvert $x_1 \in X_1$, vil $(s_n)_{x_1} \uparrow f_{x_1}$, hvorfor $\int (s_n)_{x_1} d\mu_2 \uparrow \int f_{x_1} d\mu_2$. På basis af det allerede viste følger heraf, at $x_1 \curvearrowright \int f_{x_1} d\mu_2$ er en $\mathcal{M}^+(X_1, \mathcal{B}_1)$-funktion og ved (endnu) en anvendelse af Lebesgue's sætning om monoton konvergens, at

$$\lim_{n \to \infty} \int \left(\int (s_n)_{x_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int (\int f_{x_1} d\mu_2) d\mu_1.$$

Heraf ses nu, at

$$\lim_{n\to\infty}\int s_n d\mu = \int (\int f_{x_1} d\mu_2) d\mu_1.$$

Men da $s_n \uparrow f$, kan venstresiden her identificeres med $\int f d\mu$ (igen anvendes Lebesgue's sætning om monoton konvergens) og (6.8) følger for funktionen f. Dermed er den generelle gyldighed af (i) vist.

(ii): Antag, at $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mu)$. Så vil $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$ være endelige og Tonelli's sætning sikrer passende målelighed samt gyldighed af formlerne

$$\begin{aligned}\iint f^+_{x_1} d\mu_2 d\mu_1(x_1) &= \int f^+ d\mu,\\ \iint f^-_{x_1} d\mu_2 d\mu_1(x_1) &= \int f^- d\mu.\end{aligned}$$

Af endelighedskriteriet for ikke-negative funktioner sluttes, at for μ_1-næsten alle x_1 er $f^+_{x_1}$ og $f^-_{x_1}$ integrable m.h.t. μ_2. Så må f_{x_1} være μ_2-integrabel n.o. $[\mu_1]$. Den ønskede formel (6.9) udledes nu let af ovenstående formler for $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$. $\square$

Bemærkninger. Idet vi udnytter symmetrien mellem X_1- og X_2-begreber har vi, med notation og forudsætninger som i sætningen, at

$$\int f d\mu = \iint f(x_1,x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) = \iint f(x_1,x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) \tag{6.10}$$

gælder både for $f \in \mathcal{M}^+(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ (hvor størrelserne kan være $+\infty$) og for $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2, \mu)$. Om – i en given situation med en vilkårlig reel funktion f – formlen (6.10) kan anvendes, kan checkes ved at udnytte formlen på f^+ og f^-. Hvis $\int f^+ d\mu$ og $\int f^- d\mu$ er endelige, vil dette være tilfældet.

Ofte er man kun interesseret i at udnytte, at de to dobbeltintegraler i (6.10) stemmer overens og det sker altså, hvis enten $f \geq 0$ eller $\int |f| d\mu < \infty$ (forudsat f er målelig, naturligvis).

Mange forfattere taler blot om en "udnyttelse af Fubini" når man anvender en af de muligheder, der ligger i (6.10).

Eksempel 4. En central observation i forbindelse med produktmål er, at Lebesguemålene i $\mathbb{R}^n$, lad os benævne dem λ_n, er "produktmål af hinanden", dvs. $\lambda_{n+m} = \lambda_n \otimes \lambda_m$. Lad nemlig μ betegne produktmålet $\lambda_n \otimes \lambda_m$. Så er $\mu(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B)$ for $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ og $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Specielt gælder dette for A og B af formen $A = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ og $B = [a_{n+1},b_{n+1}] \times \cdots \times [a_{n+m},b_{n+m}]$. Så må $\mu([a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{n+m},b_{n+m}]) = \lambda_{n+m}([a_1,b_1] \times \cdots \times [a_{n+m},b_{n+m}])$ og vi slutter, at $\mu = \lambda_{n+m}$.

Specielt finder vi så for $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$, at der gælder formlen

$$\lambda_{n+m}(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(B_x) d\lambda_n(x).$$

For $n = m = 1$ kan formlen tolkes som formlen for arealbestemmelse ved deling i strimler og for $n = 1$, $m = 2$ som formlen for volumenbestemmelse ved deling i skiver. $\square$

Man udvider uden vanskelighed resultaterne om produkt $\mu_1 \otimes \mu_2$ af to mål til resultater for produkt $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ af endeligt mange mål. Som i tilfældet med to faktorer antager man, at målene er σ-endelige. Definitionsligningen bliver

$$(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_n(A_n),$$

hvor A'erne er målelige i de respektive faktorrum. Udover oplagte generalisationer nævner vi den associative lov. For produkt af tre mål gælder således (se evt. Opgave 21)

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3). \tag{6.11}$$

For gyldigheden heraf er der strengt taget underforstået nogle oplagte identifikationer (således regner vi $X_1 \times X_2 \times X_3$, $(X_1 \times X_2) \times X_3$ og $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ for samme mængde).

Det bliver straks mere spændende når vi spørger om produktmål med uendeligt mange faktormål. Her findes også en række positive resultater. En systematisk behandling ligger uden for rammerne af denne fremstilling og inddrager metoder der er helt anderledes end, hvad vi fik brug for når talen var om produkt af endeligt mange mål. Teorien for konstruktion af mål som udviklet i §4.6 bliver så et centralt værktøj. Den interesserede læser kan i opgaverne se, hvordan man kan gå frem.

Vi vil altså ikke her i hovedteksten gå ind i en systematisk behandling af vilkårlige produktmål. Derimod vil vi vise, at en smart metode – som læseren måske vil opfatte som noget ad hoc – fører til konstruktion af tællelige produktmål i visse tilfælde. Vi skal holde os til produkt af sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$ og vælger en sprogbrug hentet fra sandsynlighedsregningen. Hovedresultatet sikrer bl.a., at vi for en vilkårlig sandsynlighedsfordeling på $\mathbb{R}$ kan konstruere et sandsynlighedsfelt og en følge af uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med den opgivne fordeling som fælles fordeling. Med dette resultat kan vi stort set tilfredsstille ethvert behov for at opstille sandsynlighedsmodeller; videregående teori for stokastiske processer kræver dog mere.

Definition 6.2.3 Lad $\mu_n = (X_n, \mathcal{B}_n, \mu_n)$; $n \geq 1$ være sandsynlighedsmål. Vi siger, at $(X, \mathcal{B}, \mu)$ er *produktmålet* af disse målrum, og skriver $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n$, såfremt $(X, \mathcal{B})$ er produkt-Borelstrukturen af $(X_n, \mathcal{B}_n)$; $n \geq 1$ og såfremt det for enhver følge $A_1, A_2, \cdots$ af mængder med $A_n \in \mathcal{B}_n$; $n \geq 1$ for hvilken $A_n = X_n$ f.v.t. gælder, at

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \cdot \cdots \tag{6.12}$$

Sætning 6.2.4 *Idet der henvises til definitionen ovenfor gælder, at produktmålet* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots$ *er entydigt bestemt.*

Bevis. Lad $\mathcal{A}$ betegne brolægningen af alle delmængder af X af formen $A_1 \times A_2 \times \cdots$, hvor $A_n \in \mathcal{B}_n$; $n \geq 1$ og $A_n = X_n$ f.v.t. Så er $\mathcal{A}$ $(\emptyset, X, \cap f)$-stabil og $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Definerer vi λ på $\mathcal{A}$ ved

$$\lambda(A_1 \times A_2 \times \cdots) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \cdot \cdots$$

er λ endelig og ethvert produktmål er en udvidelse af λ. Resultatet følger så af Sætning 4.1.2. $\square$

Vi skal nedenfor vise eksistens af produktmålet i tilfældet, hvor alle mål μ_n er defineret på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Vi finder det hensigtsmæssigt, ved beviset for dette resultat, at anvende intern sandsynlighedsteoretisk notation. De begreber, vi får brug for er fastlagt i følgende definition:

Definition 6.2.4 Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et *sandsynlighedsfelt*, dvs. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ er et målrum med P et sandsynlighedsmål, og lad $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ være *stokastiske variable* definerede på Ω, dvs. f_n'erne er målelige funktioner $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Lad μ_n; $n \geq 1$ betegne fordelingerne af de stokastiske variable $f_n; n \geq 1$ og lad μ være fordelingen af diagonalafbildningen $f = \Delta_{n=1}^{\infty} f_n$ af Ω ind i $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De stokastiske variable f_n; $n \geq 1$ siges at være *uafhængige,* evt. *stokastisk uafhængige,* såfremt μ er produktmålet af μ_n'erne: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots$.

Bemærkninger. Husk, at diagonalafbildningen er afbildningen $\omega \curvearrowright (f_n(\omega))_{n \geq 1}$ af Ω ind i $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Skriver vi ud, hvad betingelsen om uafhængighed kommer ud på, ser vi, at det, der forlanges, er, at for alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $A_1, \cdots, A_n$ målelige delmængder af $\mathbb{R}$ gælder

$$\begin{aligned} & P\left(\{\omega \in \Omega \mid f_1(\omega) \in A_1, \cdots, f_n(\omega) \in A_n\}\right) \\ = \; & P\left(\{\omega \in \Omega \mid f_1(\omega) \in A_1\}\right) \cdot \cdots \cdot P\left(\{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) \in A_n\}\right) \end{aligned}$$

eller, kort skrevet,

$$P\left(f_1 \in A_1, \cdots, f_n \in A_n\right) = P\left(f_1 \in A_1\right) \cdot \cdots \cdot P\left(f_n \in A_n\right). \tag{6.13}$$

Venstresiden her er jo $P(f \in A_1 \times \cdots \times A_n \times X_{n+1} \times \cdots)$ som er lig med $\mu(A_1 \times \cdots \times A_n \times X_{n+1} \times \cdots)$ og højresiden er $\mu_1(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_n(A_n)$ (= det samme ganget med $\mu_{n+1}(X_{n+1}) \cdot \cdots$).

Ligningen (6.13) har sandsynlighedsteoretisk appel som enhver, der har fulgt et kursus i sandsynlighedsregning (f.eks. Mat 2SS eller Stat 1) vil vide. I sandsynlighedsregning spiller selve afbildningerne f_n – de stokastiske variable – en fremtrædende rolle, mens man for en målteoretisk behandling normalt vil fokusere på at uafhængighedskravet (6.13) er ækvivalent med at billedmålet for diagonalafbildningen er produktmålet af de enkelte billedmål – den præcise formulering er givet i definitionen ovenfor.

Nedenfor får vi brug for et intuitivt oplagt resultat, nemlig følgende:

Sætning 6.2.5 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt og f_n; $n \geq 1$ en følge af uafhængige stokastiske variable. Lad endvidere $\mathbb{N} = \bigcup_1^\infty N_\nu$ være en klassedeling af $\mathbb{N}$ og lad der for hvert $\nu \geq 1$ være givet en målelig afbildning $\varphi_\nu : \mathbb{R}^{N_\nu} \to \mathbb{R}$. Så er de stokastiske variable $g_\nu; \nu \geq 1$ uafhængige, hvor $g_\nu(\omega) = \varphi_\nu((f_n(\omega))_{n \in N_\nu})$; $\nu \geq 1$.*

Beviset er ikke svært, men noget teknisk. Vi henviser til Opgave 20.

Definition 6.2.4 fastlægger, *hvad* det vil sige, at $(f_n)_{n \geq 1}$ er en følge af uafhængige stokastiske variable, men der er ingen oplagt metode til at skaffe os en sådan følge. Der gælder imidlertid følgende meget tilfredsstillende resultat:

Sætning 6.2.6 (Hovedsætning om eksistens af modeller for stokastisk uafhængighed). *Til en vilkårlig følge $(\mu_n)_{n \geq 1}$ af sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$ findes et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og stokastiske variable f_n; $n \geq 1$ således, at f_n'erne er stokastisk uafhængige og således, at fordelingen af f_n er μ_n; $n \geq 1$.*

Bevis. Beviset består af tre dele, der hver indeholder en smart detalje (et "trick"): Del 1, hvor resultatet vises, hvis μ_n'erne svarer til plat- og krone forsøg (tricket er: brug Rademacher funktionerne!), del 2, hvor resultatet vises for ligefordelinger over $[0,1]$, dvs. alle μ_n'erne er restriktionen af Lebesguemålet til $[0,1]$ (tricket her er "opsplitning") og endelig del 3, hvor det generelle resultat vises (tricket er: brug fraktilfunktioner!).

ad del 1: Vi sætter $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$, hvor P er Lebesguemålet på $[0,1]$. *Rademacherfunktionerne* r_n; $n \geq 1$ er funktionerne på Ω antydet i figuren:

Figur 17

Præcist:

$$r_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{hvis INT}(2^{\mathrm{n}}\omega) \text{ er ulige} \\ -1 & \text{hvis INT}(2^{\mathrm{n}}\omega) \text{ er lige.} \end{cases}$$

Lad μ_n være fordelingen af r_n, altså billedmålet af P under afbildningen r_n Det er klart, at for hvert $n \geq 1$, er $\mu_n = \frac{1}{2}\varepsilon_{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_1$ (husk notationen fra §4.4 for diskrete mål). Overvej! Vi påstår, at r_n'erne er uafhængige og ønsker derfor at eftervise (6.13) (med r_n'er i stedet for f_n'er). Lad derfor $n \geq 1$ og lad $A_1, \cdots, A_n$ være målelige delmængder af $\mathbb{R}$. Man indser, at blot vi kan eftervise (6.13) i tilfældet, hvor hver af mængderne A_k; $1 \leq k \leq n$ enten er singleton $\{-1\}$ eller singleton $\{+1\}$, følger den generelle gyldighed af (6.13). Gør det! I det tilfælde er højresiden af

(6.13) oplagt lig med 2^{-n}. Men det samme gælder venstresiden, thi første betingelse $r_1 \in A_1$ (altså enten $r_1 = -1$ eller $r_1 = +1$) fører til en halvering af enhedsintervallet, anden betingelse $r_2 \in A_2$, fører til en yderligere halvering og så fremdeles frem til n'te og sidste betingelse $r_n \in A_n$.

Hvis vi i stedet for ± 1-variablene r_n arbejder med $(0,1)$-variablene r_n^* givet ved

$$r_n^* = (r_n + 1)/2\,; \quad n \geq 1,$$

får vi en følge af uafhængige stokastiske variable med "plat- og krone fordelingen" $\frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_1$ som fælles fordeling.

ad del 2: Der er i og for sig to idéer her. Først noterer vi, at med vores uafhængige plat- og krone variable til rådighed, kan vi se på funktionen

$$\omega \curvearrowright 0.r_1^*(\omega), r_2^*(\omega), \cdots \qquad \text{(binær udvikling)},$$

altså

$$\omega \curvearrowright \sum_{n=1}^{\infty} r_n^*(\omega) \cdot 2^{-n}.$$

Herved fås en funktion, der er ligefordelt over $[0,1]$, dvs. billedmålet af P under denne afbildning er λ, Lebesguemålet på $[0,1]$ (thi for systemet af dyadisk rationale intervaller fås det rigtige og Sætning 4.1.2 kan anvendes). Dette er der dog ikke meget interessant ved, da vi så at sige så er tilbage, hvor vi begyndte, da $\lambda = P$. Imidlertid kan vi "splitte r_n'erne op", så vi får en hel følge af ligefordelte variable. Idéen fremgår forhåbentlig af Figur 18.

Figur 18

Præcis notation kan naturligvis indføres, men vil næppe gøre sagen klarere end det, der fremgår af figuren. Vi bruger altså visse r_n^*'er til at danne funktionen u_1, visse (andre!) r_n^*'er til at danne u_2 og så fremdeles. Hver gang bruger vi uendelig mange af plat- og krone variablene til at danne den pågældende u_n-funktion. Samme ræsonnement som vi anførte ovenfor viser, at u_n er ligefordelt for hvert $n \geq 1$. Af Sætning 3.2.5 følger, at $u_1, u_2, \cdots$ er uafhængige.

ad del 3. Idéen her er nærliggende: transformér de ligefordelte variable, vi fik i del 2 over i de ønskede fordelinger. Dette udføres ved at se på fordelingsfunktionerne F_n hørende til fordelingerne μ_n, altså

$$F_n(x) = \mu_n(]-\infty, x])\,; \quad x \in \mathbb{R},\ n \geq 1$$

(se evt. Opgave 4.3).

Definer nu, for $n \geq 1$, en målelig funktion $\varphi_n :]0,1[\to \mathbb{R}$, *fraktilfunktionen*[1] hørende til μ_n (og F_n), ved

$$\varphi_n(t) = \sup\{x \mid F_n(x) < t\}\,; \quad 0 < t < 1.$$

Så gælder

$$\{t \mid \varphi_n(t) \leq x\} =]0, F_n(x)]\,; \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.14}$$

se evt. Figur 19.

Figur 19

Lad nu, for $n \geq 1$, f_n betegne den sammensatte funktion $f_n = \varphi_n \circ u_n$. Af Sætning 6.2.5 ses, at f_n'erne er uafhængige stokastiske variable. Fordelingen af f_n bestemmes let af (6.14), idet vi finder

$$\begin{aligned} P\left(f_n \leq x\right) &= P\left((\varphi_n(u_n) \leq x\right) = P\left(u_n \leq F_n(x)\right) \\ &= F_n(x)\,; \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Så f_n har fordelingsfunktionen F_n. Dermed har f_n fordelingen μ_n (anvend Sætning 4.1.2 eller se Opgave 4.3). $\square$

Bemærkning. Moralen, vi kan uddrage af dette bevis er: Med Lebesguemålet til rådighed kan vi klare alt!

Korollar 6.2.1 *Lad μ_n; $n \geq 1$ være sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$. Så findes produktmålet $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots$.*

Bevis. Betragt billedmålet af P under diagonalafbildningen $\Delta_{n=1}^{\infty} f_n : \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Her henvises til betegnelserne i Sætning 5. $\square$

[1] I statistikken tillader man en vis ubestemthed af en fraktilfunktion, idet vi om en fraktilfunktion φ blot forlanger, at φ er ikke-aftagende og at $F(\varphi(t)^-) \leq t \leq F(\varphi(t))$ for $0 < t < 1$. Er fordelingsfunktionen F strengt voksende og kontinuert, er der kun én fraktilfunktion, den inverse funktion til F.

6.3 Mål på topologiske rum

I nogen tid har vi arbejdet temmelig abstrakt med mål og integraler refererende til en vilkårlig mængde X udstyret med en eller anden Borelstruktur. Vi ved dog, at topologiske betragtninger spiller en rolle. Mest tydeligt kom det frem, da vi konstruerede de absolut vigtigste mål i hele teorien, Lebesguemålene.

I den topologiske målteori tager vi som udgangspunkt et topologisk rum X[2] og spørger, hvilke mål på X er de "topologisk pæne" mål, de mål, hvor topologi og målteori virker bedst sammen? Der findes en stor teori, der ser på dette spørgsmål. Vi nøjes med få resultater og koncentrerer os om den vigtigste klasse af mål, Radonmålene. Vi er allerede tidligere blevet enige om at den topologisk set mest interessante Borelstruktur på et topologisk rum er den naturlige Borelstruktur $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X))$.

Definition 6.3.1 Lad X være et metriserbart topologisk rum. Vi siger, at μ er et *Radonmål* på X såfremt μ er et mål defineret på $\mathcal{B}(X)$, så $\mu(K) < \infty$ for enhver kompakt mængde K og således, at μ er *indre regulær* m.h.t. $\mathcal{K}(X)$, dvs. såfremt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A\,,\ K \in \mathcal{K}(X)\} \tag{6.15}$$

for enhver Borelmængde A.

Bemærkninger. Idet vi vedtager, at enhver mængde, der er betegnet med bogstavet "K" betegner en kompakt mængde, kan (6.15) skrives på formen

$$\mu(A) = \sup_{K \subseteq A} \mu(K)\,; \quad A \in \mathcal{B}(X). \tag{6.16}$$

Definitionen udvides fra ord til andet til at gælde et vilkårligt Hausdorff topologisk rum.

Eksempel 1. Lad X være diskret, svarende til den diskrete metrik givet ved $d(x,y) = 1$ for alle $x \neq y$ og $d(x,y) = 0$ for $x = y$. Så er et vilkårligt diskret mål $\mu = \sum_{x \in X} a_x \varepsilon_x$ med $0 \leq a_x < \infty$ for alle $x \in X$ et Radonmål. Thi $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{G}(X)) = \sigma(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}(X)$ og μ *er* defineret på hele $\mathcal{P}(X)$; og enhver kompakt mængde er endelig så μ er endelig på enhver kompakt mængde; og endelig er det klart, at (6.15) gælder.

Hvis X derimod betegner mængden X med en anden topologi end den diskrete, er det ikke længere sikkert, at de diskrete mål er Radonmål. Lad f.eks. $X = [0,1]$ med sædvanlig topologi og lad μ betegne tællemålet, nu betragtet på den for X naturlige Borelstruktur, $\mathcal{B}(X)$. Så er μ *ikke* et Radonmål, idet X selv er kompakt og $\mu(X) = \infty$. $\square$

[2] som sædvanlig kan læseren gerne antage, at X er et metriserbart topologisk rum. Med $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{F}(X)$ og $\mathcal{K}(X)$ betegnes brolægningerne af hhv. åbne, lukkede og kompakte mængder i X.

EKSEMPEL 2. Lad $X = \mathbb{R}$ med sædvanlig topologi og lad λ betegne Lebesguemålet på X. Så er $\lambda(K) < \infty$ for enhver kompakt mængde, da enhver kompakt mængde er begrænset. Det er muligt, og ikke særlig svært, direkte at eftervise approksimationsegenskaben (6.16). Derfor er λ et Radonmål. Vi foretrækker at vente med at vise dette. □

Udover Radonmålene er det bekvemt at indføre følgende begreber fra den topologiske målteori (her formuleret for metriserbare rum selv om begreberne giver god mening i vilkårlige topologiske rum).

Definition 6.3.2 Lad X være et metriserbart topologisk rum.

Ved et *Borelmål* på X forstås et mål defineret på $\mathcal{B}(X)$. Et Borelmål er *lokalt endeligt,* hvis der for hvert $x \in X$ findes en åben omegn $N(x)$ af x med endeligt mål.

Et Borelmål μ er *regulært,* hvis det for alle $A \in \mathcal{B}(X)$ gælder, at

$$\mu(A) = \sup_{F \subseteq A} \mu(F) = \inf_{G \supseteq A} \mu(G), \tag{6.17}$$

hvor det er underforstået, at F betegner en lukket og G en åben mængde.

Et Borelmål er *τ-glat,* såfremt det for enhver opad filtrerende familie $(G_i)_{i \in I}$ af åbne mængder gælder, at $\mu(G_i) \to \mu(G)$, hvor G betegner foreningsmængden af G_i'erne.

Betingelsen for τ-glathed kan formuleres som følger:

$$G_i \uparrow G \Rightarrow \sup_{i \in I} \mu(G_i) = \mu(G), \tag{6.18}$$

hvor det er underforstået, at G_i'erne betegner åbne mængder – så bliver $G = \bigcup G_i$ naturligvis også åben. Det, der er det væsentlige her er, at vi tillader, at indeksmængden I er overtællelig. At vi i (6.18) må indskrænke os og ikke forlange egenskaben for vilkårlige opad filtrerende familier af Borelmængder belyses måske bedst ved at se på Lebesguemålet på $[0, 1]$ og familien $(F_i)_{i \in I}$ af samtlige endelige delmængder af $[0, 1]$. Denne familie er opad filtrerende med $F_i \uparrow [0, 1]$, men $\mu(F_i) = 0$ for alle i, mens $\mu([0, 1]) = 1$. Det er defor naturligt at indskrænke sig til at se på familier af åbne mængder i definitionen på τ-glathed.

Det er klart, at såfremt μ er et endeligt τ-glat mål, gælder følgende egenskab, der er "dual" til (6.18):

$$F_i \downarrow F \Rightarrow \inf_{i \in I} \mu(F_i) = \mu(F), \tag{6.19}$$

hvor vi har en familie $(F_i)_{i \in I}$ af lukkede mængder i tankerne.

Først argumenterer vi for, at Radonmål er de "pæneste" topologisk definerede mål:

Sætning 6.3.1 *Ethvert Radonmål μ på et separabelt, metriserbart topologisk rum er lokalt endeligt, σ-endeligt, regulært og τ-glat. Desuden vil der, for enhver Borelmængde A findes en F_σ-mængde A_0 (dvs. en numerabel foreningsmængde af lukkede mængder) og en G_δ-mængde A_1 (dvs. en numerabel fællesmængde af åbne mængder), så $A_0 \subseteq A \subseteq A_1$ og $\mu(A_1 \setminus A_0) = 0$.*

Bevis. Lad μ være et Radonmål på det separable metriserbare rum X. Vi viser først, at μ er lokalt endelig. Antag, dette ikke var tilfældet. Så findes $x \in X$, så $\mu(B(x,r)) = \infty$ for alle $r > 0$. Her tænker vi os valgt en metrik d på X som inducerer topologien og $B(x,r)$ betegner den åbne kugle med centrum x og radius r. Da μ er et Radonmål, kan vi for hvert $n \geq 1$ vælge en kompakt mængde $K_n \subseteq B(x, \frac{1}{n})$, så $\mu(K_n) \geq n$. Sæt nu $K_0 = \{x\} \cup \bigcup_1^\infty K_n$. Så er K_0 kompakt. Dette kan enten vises ved at vise, at K_0 er følgekompakt, eller vi kan eftervise Heine-Borel's overdækningsegenskab (det er egenskaben i (Berg 97'), Sætning 6.17). Vælges den sidste fremgangsmåde, ses på en åben overdækning $K_0 \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Man vælger så $i_0 \in I$, så $x \in G_{i_0}$. Dernæst vælges $n_0 \geq 1$, så $B(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq G_{i_0}$. Så vælges $i_1, \cdots, i_\nu$, endelig mange indices fra I, så $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{n_0 - 1} \subseteq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_\nu}$. Så er det klart, at de åbne mængder $G_{i_0}, G_{i_1}, \cdots, G_{i_\nu}$ overdækker K_0. Hermed er overdækningsegenskaben vist, og vi slutter, at K_0 er kompakt. Dette fører imidlertid til en modstrid, thi for hvert $n \geq 1$ vil $\mu(K_0) \geq \mu(K_n) \geq n$, så $\mu(K_0) = \infty$! Vi må konkludere, at der findes $r > 0$, så $\mu(B(x,r)) < \infty$. Målet μ er altså lokalt endeligt.

Vi kan nu indse, at μ må være σ-endelig. For at se det, bestemmes først, til hvert $x \in X$, et positivt tal r_x, så $\mu(B(x, r_x)) < \infty$. Så vil

$$\bigcup_{x \in X} B(x, r_x) = X.$$

Ifølge et standard ræsonnement fra topologien findes en tællelig delfamilie af $(B(x, r_x))_{x \in X}$ med foreningsmængde X, lad os sige at

$$\bigcup B_n = X \text{ med } B_n = B(x_n, r_{x_n}) ; \quad n \geq 1.$$[3]

Da alle B_n'erne har endeligt mål, har vi dermed set, at μ er σ-endelig. Til senere brug noterer vi, at B_n'erne er åbne mængder.

Nu efterviser vi approksimationsegenskaben med F_σ- og G_δ-mængder. Først "disjunktifiserer" vi B_n'erne, vi fandt ovenfor. (Sådan set ikke nødvendigt, men det gør beviset klarere, specielt, hvis man støtter sig til en figur). Herved fås en følge $(A_n)_{n \geq 1}$ af parvis disjunkte Borelmængder med endeligt mål og med foreningsmængde X. Lad nu A være en vilkårlig Borelmængde. Se på et fast $n \geq 1$. Da $\mu(A \cap A_n) < \infty$,

[3]For at se dette, lad G_k ; $k \geq 1$ være en tællelig basis for topologien. For visse indices k findes x, så $G_k \subseteq B(x, r_x)$. For hvert af disse indices vælges x_k med denne egenskab. Så vil foreningsmængden af de tælleligt mange kugler, svarende til de udvalgte x_k'er, være hele mængden X.

findes til $m \geq 1$ en kompakt mængde $K_{nm} \subseteq A \cap A_n$ med $\mu(A \cap A_n \setminus K_{nm}) < 1/m$. Sættes $A_{0n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{nm}$, er A_{0n} en F_σ-mængde med $\mu(A \cap A_n \setminus A_{0n}) = 0$. Dette kan vi nu gøre for hvert $n \geq 1$. Sættes $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{0n}$, er A_0 en F_σ-mængde indeholdt i A og $\mu(A \setminus A_0) = 0$. Anvendes samme ræsonnement på $\complement A$, findes en F_σ-mængde A_0^* indeholdt i $\complement A$, så $\mu(\complement A \setminus A_0^*) = 0$. Sættes $A_1 = \complement A_0^*$, er A_1 en G_δ-mængde, der indeholder A, så $\mu(A_1 \setminus A) = 0$. Mængderne A_0 og A_1 er af den ønskede form og $\mu(A_1 \setminus A_0) = 0$. Hermed et den ønskede approksimationsegenskab vist.

Det virker umiddelbart oplagt, at vi nu kan slutte, at μ er regulær. Af $A_0 \subseteq A$, $\mu(A_0) = \mu(A)$ kan vi, da A_0 er en F_σ-mængde, slutte at

$$\mu(A) = \sup_{F \subseteq A} \mu(F),$$

men vi kan ikke uden videre af $A \subseteq A_1$, $\mu(A_1 \setminus A) = 0$ og A_1 en G_δ-mængde slutte, at

$$\mu(A) = \inf_{G \supseteq A} \mu(G).$$

Det, man kan risikere er, at $\mu(A) < \infty$, mens $\mu(G) = \infty$ for enhver åben mængde G, der indeholder A. Imidlertid, denne situation kan ikke forekomme. Vi kan nemlig for hvert $n \geq 1$ bestemme en åben mængde G_n med $A \cap B_n \subseteq G_n \subseteq B_n$ og $\mu(G_n \setminus (A \cap B_n)) <$ et passende ε_n. Så vil $G = \bigcup G_n$ være åben, $A \subseteq G$ og $\mu(G \setminus A) < \sum \varepsilon_n$. Målet μ er altså regulært.

Endelig vises, at μ er τ-glat. Antag, at $G_i \uparrow G$. For $t < \mu(G)$ bestemmes K kompakt, så $K \subseteq G$ og $\mu(K) > t$. Da $K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, findes (igen Heine-Borel!) $i_1, \cdots, i_\nu$, så $K \subseteq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_\nu}$. Da $(G_i)_{i \in I}$ filtrerer opad, findes i_0, så $G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_\nu} \subseteq G_{i_0}$. Så vil $\mu(G_{i_0}) \geq \mu(K) > t$. Dermed vil supremet i (6.18) være $> t$. Vi slutter, at supremet er $\geq \mu(G)$. Dette er den ikke-trivielle ulighed i (6.18). Der gælder altså lighed i (6.18) og μ må være τ-glat. □

Bemærkning. De viste egenskaber kræver ikke alle, at X er separabel og metriserbar. Vi noterer, at én af egenskaberne, nemlig τ-glathed, gælder vilkårlige Radonmål. Dette fremgår af beviset.

Vi viser nu, at τ-glathedsegenskaben udvides fra åbne mængder (eller snarere deres indikatorfunktioner) til vilkårlige nedad-halvkontinuerte funktioner:

Sætning 6.3.2 *Lad μ være et Radonmål. Så gælder, for en vilkårlig opad filtrerende familie $(f_i)_{i \in I}$ af ikke-negative nedad-halvkontinuerte funktioner, at*

$$\sup_{i \in I} \int f_i d\mu = \int f d\mu,$$

hvor $f = \sup\{f_i \mid i \in I\}$.

Kort skrevet, siger sætningen, at for et Radonmål gælder implikationen

$$0 \leq f_i \text{ l.s.c. } \wedge f_i \uparrow f \Rightarrow \sup_{i \in I} \int f_i d\mu = \int f d\mu. \tag{6.20}$$

Vedrørende halvkontinuerte funktioner henvises til §3.5.

Bevis. For en vilkårlig ikke-negativ funktion h og ethvert $n \geq 1$ sættes

$$h_n = 2^{-n} \sum_{\nu=1}^{\infty} 1_{\{h > \nu/2^n\}}.$$

Bemærk, at så vil $0 \leq h_n \uparrow h$ (gælder også, hvis h kan antage værdien $+\infty$)..

Lad nu $t < \int f d\mu$ være givet. Vi vil finde et $i_0 \in I$, så $\int f_{i_0} d\mu > t$. Dette vil vise den ikke-trivielle ulighed "$\geq$" i (6.20). Først bestemmes n, så $\int f_n d\mu > t$ (her udnyttes Lebesgue's sætning om monoton konvergens). Da

$$\int f_n d\mu = 2^{-n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\{f > \nu/2^n\}),$$

kan vi bestemme N således, at

$$2^{-n} \sum_{\nu=1}^{N} \mu(\{f > \nu/2^n\}) > t.$$

Udnyt nu, at μ er τ-glat og at det for ethvert $s > 0$ gælder, at $(\{f_i > s\})_{i \in I}$ er en opad filtrerende familie af åbne mængder med foreningsmængde $\{f > s\}$. For hvert $\nu = 1, \cdots, N$ kan vi så finde et $i_\nu \in I$, så $\mu(\{f_{i_\nu} > \nu/2^n\})$ er tæt på $\mu(\{f > \nu/2^n\})$. Herved kan vi opnå, at

$$2^{-n} \sum_{\nu=1}^{N} \mu\left(\{f_{i_\nu} > \nu/2^n\}\right) > t.$$

Da $(f_i)_{i \in I}$ er opad filtrerende, kan vi finde $i_0 \in I$, så $f_{i_0} \geq f_{i_\nu}$ for alle $\nu = 1, \cdots, N$. Så må

$$2^{-n} \sum_{\nu=1}^{N} \mu\left(\{f_{i_0} > \nu/2^n\}\right) > t$$

og dermed må også $\int f_{i_0,n} d\mu > t$ og så må $\int f_{i_0} d\mu > t$ gælde, ganske som ønsket. $\square$

I opgaverne findes flere egenskaber for Radonmål. De er simpelthen pæne! Men hvor svære er de "at få fat på"? Her får vi os en behagelig overraskelse (?). Vi kan nemlig normalt ikke undgå at have med Radonmål at gøre. Der gælder følgende interessante resultat:

Sætning 6.3.3 *Ethvert lokalt endeligt Borelmål på et polsk rum er et Radonmål.*

Bevis. Antag, at X er polsk, dvs. X er separabel og fuldstændig metriserbar (jvf. s. 42). Lad d være en fuldstændig metrik, der inducerer topologien. Lad nu μ være et lokalt endeligt Borelmål på X.

Det er let at se, at μ er endelig på kompakte mængder. Vælg nemlig, til $x \in X$, et positivt tal r_x så $\mu(\overline{B(x,r_x)}) < \infty$ (det er bekvemt at se på afslutningerne af hensyn til en senere overvejelse). Hvis K er kompakt, overdækkes K af $B(x,r_x)$-mængderne med $x \in K$ og derfor også af endeligt mange af disse. Så må $\mu(K) < \infty$.

Vi mangler at vise, at μ er indre-regulær m.h.t. $\mathcal{K}(X)$. Vi reducerer først til tilfældet, hvor μ er et endeligt mål. Hertil bemærkes, at på samme måde som i beviset for Sætning 1, kan vi finde mængder $B_n = B(x_n, r_{x_n})$; $n \geq 1$ som overdækker X. Sættes $F_n = (B_1 \cup \cdots \cup B_n)^- = \overline{B}_1 \cup \cdots \cup \overline{B}_n$ ser vi, at F_n'erne er lukkede mængder med endeligt mål og $F_n \uparrow X$. Hvis sætningen nu kan vises for endelige mål, kan vi indse den generelle gyldighed på følgende måde: Ved at se på metrikken d's restriktion til F_n'erne ses, at F_n'erne bliver polske rum. Hvis $A \in \mathcal{B}(X)$, kan vi derfor først bestemme $n \geq 1$, så $\mu(A \cap F_n) \approx \mu(A)$. Dernæst kan vi, ved at se på restriktionen af μ til F_n og anvende sætningen for dette endelige mål slutte, at der findes en kompakt mængde $K \subseteq A \cap F_n$ med $\mu(K) \approx \mu(A \cap F_n)$. Så må $\mu(K) \approx \mu(A)$, som ønsket.

Tilbage står at vise sætningen under den ekstra antagelse, at $\mu(X) < \infty$.

I første omgang viser vi, at det for enhver Borelmængde A gælder, at

$$\mu(A) = \sup_{F \subseteq A} \mu(F) = \inf_{G \supseteq A} \mu(G), \tag{6.21}$$

altså at μ er regulær.

Lad $\mathcal{S}$ betegne brolægningen af $A \in \mathcal{B}(X)$ for hvilke (6.21) gælder. Så vil $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{S}$, thi for enhver lukket mængde F findes åbne mængder $(G_n)_{n \geq 1}$ med $G_n \downarrow F$ (sæt f.eks. $G_n = \{x \mid d(x,F) < 1/n\}$). Da $\mu(G_1) \leq \mu(X) < \infty$, vil $\mu(G_n) \to \mu(F)$.

Det er klart, at $\mathcal{S}$ er $(\complement)$-lukket. Vi viser nu, at $\mathcal{S}$ er en σ-algebra ved at vise, at $\mathcal{S}$ også er $(\cup c)$-lukket. Lad derfor $(S_n)_{n \geq 1}$ være en følge af mængder i $\mathcal{S}$. Bestem, til $\varepsilon > 0$, mængder $F_n \subseteq S_n \subseteq G_n$ med $\mu(G_n \setminus F_n) < \varepsilon 2^{-n}$ (F'er lukkede, G'er åbne). Så vil

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(G_n \setminus F_n\big) < \varepsilon.$$

Det følger, at for N tilstrækkelig stor vil

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) < \varepsilon.$$

Sæt nu $F = \bigcup_1^N F_n$ og $G = \bigcup_1^\infty G_n$. Så er F lukket, G åben, $F \subseteq \bigcup_1^\infty S_n \subseteq G$ og $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Af dette ræsonnement følger nu let, at $\bigcup_1^\infty S_n \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ er altså en σ-algebra som indeholder $\mathcal{F}(X)$. Dermed må $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{B}(X)$. Hermed er det vist, at μ er regulær.

Vi stiler nu efter at vise, at hele mængden X kan approksimeres indefra med kompakte mængder. Vi vælger først en tællelig tæt delmængde D af X. For ethvert $\varepsilon > 0$ vil

$$X = \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon). \tag{6.22}$$

Da D er tællelig, ses af (6.22), at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes en endelig delmængde D_ε af D, med

$$\mu\left(\bigcup_{x \in D_\varepsilon} B(x, \varepsilon)\right)$$

så tæt på $\mu(X)$, vi måtte ønske det. Til hvert $n \geq 1$ vælges D_n endelig $\subseteq D$således, at

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{x \in D_n} B(x, 1/n)\right) < \varepsilon 2^{-n}.$$

Så er

$$K = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{x \in D_n} \overline{B(x, 1/n)}$$

kompakt[4] og

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus K) &\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus \bigcup_{x \in D_n} B(x, 1/n))\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus \bigcup_{x \in D_n} B(x, 1/n)\right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hele mængden X kan altså approksimeres med kompakte mængder. Til en vilkårlig mængde $A \in \mathcal{B}(X)$ og $\varepsilon > 0$ kan vi så vælge en lukket mængde $F \subseteq A$ med $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ og hvis nu K er en kompakt mængde med $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$, finder vi $\mu(X \setminus (F \cap K)) < 2\varepsilon$. Da $F \cap K$ er kompakt, har vi dermed approksimeret A indefra med en kompakt mængde. $\square$

Bemærk, at Sætning 3 er præcis i den forstand, at det karakteriserer Radonmålene på et polsk rum som de lokalt endelige Borelmål. F.eks. ser vi så, at Radonmålene på $\mathbb{R}^n$ kan karakteriseres som Borelmålene, der er endelige på begrænsede mængder.

[4]Dette følger af en vigtig sætning om kompakthed i metriske rum. Da sætningen ikke er medtaget i (Berg 97') og da ræsonnementet er centralt for nærværende bevis – det er det eneste sted, hvor fuldstændigheden udnyttes – giver vi her et direkte bevis for at K er kompakt: Lad (x_k) være en følge på K. Vi skal vise, at (x_k) har et fortætningspunkt (må nødvendigvis ligge i K, da K er lukket). Ved successive udtyndinger og afsluttende betragtning af "diagonalfølgen" ses, at vi kan finde en delfølge af (x_k) og punkter $y_n \in D_n$; $n \geq 1$, så det for hvert $n \geq 1$ gælder, at delfølgen fra et vist trin at regne ligger i $\overline{B(y_n, 1/n)}$. Delfølgen er altså en Cauchy-følge og derfor konvergent.

Der er interessante mål på $\mathbb{R}^n$ som *ikke* er Radonmål. Det er så "meget uendelige" mål som tællemålet (og andre Hausdorffmål).

Et Radonmål er naturligvis bestemt ved sin restriktion til de kompakte mængder. Vi kan præcist karakterisere disse restriktioner.

Definition 6.3.3 Lad X være et metriserbart topologisk rum. En ikke-negativ endelig mængdefunktion $\lambda : \mathcal{K}(X) \to [0, \infty[$ kaldes et *Radon indhold* såfremt det for alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)$ med $K_1 \subseteq K_2$ gælder, at

$$\sup_{K \subseteq K_2 \setminus K_1} \lambda(K) = \lambda(K_2) - \lambda(K_1). \tag{6.23}$$

Vi bemærker en passant, at et Radon indhold er det samme som en stram mængdefunktion på $\mathcal{K}(X)$, jvf. Definition 4.1.4 og Sætning 4.6.4.

Det er klart, at restriktionen af et Radonmål til de kompakte mængder er et Radon indhold. Der gælder også et omvendt resultat:

Sætning 6.3.4 (Kisyński's sætning) *Ethvert Radon indhold kan udvides til et Radonmål. Udvidelsen er entydigt bestemt.*

$*$**Bevis.** Dette følger direkte af supplementet (Theorem 1.3.2) eller af Type I-udvidelsessætningen, Sætning 4.6.7, del (ii). Anvendes del (iii) af denne sætning, ses tillige – hvad vi sådan set allerede ved – at udvidelsen er et τ-glat mål. □

Der er altså en én-entydig sammenhæng mellem Radonmål og Radon indhold. Man kan gå en hel del videre og vise en nyttig generalisation af Kisyński's sætning, idet man kan nøjes med at se på restriktion af Radonmål til visse delbrolægninger af $\mathcal{K}(X)$:

Sætning 6.3.5 *Lad X være et metriserbart topologisk rum og $\mathcal{K}$ en $(\emptyset, \cap f)$-lukket delbrolægning af $\mathcal{K}(X)$ således, at enhver kompakt mængde er en fællesmængde af endelige foreningsmængder af mængder i $\mathcal{K}$ (dvs. $\mathcal{K}(X) = (\emptyset, \cup f, \cap a)$-afslutningen af $\mathcal{K}$). Så kan ethvert stramt indhold på $\mathcal{K}$ udvides til et Radonmål. Udvidelsen er entydigt bestemt.*

$*$**Bevis.** Dette følger ved at kombinere Type III- og Type II-udvidelsessætningerne i §4.6. □

Som en vigtig anvendelse af Sætning 4 viser vi et resultat for produktmål:

Sætning 6.3.6 *Lad $\mu_1 = (X_1, \mathcal{B}(X_1), \mu_1)$ og $\mu_2 = (X_2, \mathcal{B}(X_2), \mu_2)$ være to Radonmål. Da findes et entydigt bestemt produktmål af μ_1 og μ_2 på $(X_1 \times X_2, \mathcal{B}(X_1 \times X_2))$ som tillige er et Radonmål.*

$*$**Bevis.** Anvend Sætning 5 med $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X_1) \times \mathcal{K}(X_2)$ og $\lambda : \mathcal{K} \to [0, \infty[$ givet ved $\lambda(K_1 \times K_2) = \mu_1(K_1) \cdot \mu_2(K_2)$. Flere detaljer skal checkes efter. Dette overlades til den energiske læser! $\square$

På grund af entydigheden af det konstruerede mål, kaldes det *Radon-produktmålet* af μ_1 og μ_2. Hyppigt betegnes det $\mu_1 \otimes \mu_2$, hvilken betegnelse man da også kan anvende, hvis det er klart, at man arbejder med Radonmål. Men Radonmålet $\mu_1 \otimes \mu_2$ behøver ikke være det samme som det abstrakte produktmål $\mu_1 \otimes \mu_2$ konstrueret i henhold til Sætning 6.2.2, idet dette kun er defineret på $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2)$, mens Radon-produktmålet er defineret på $\mathcal{B}(X_1 \times X_2)$, der kan være mere omfattende (se Sætning 2.6.5 og Opgave 31). I øvrigt kan vi notere os, at der i Sætning 6 ikke er nogen endeligheds-restriktion på målene, således som det var tilfældet for den abstrakte teori (Sætning 6.2.2).

6.4 Riesz' repræsentationssætning

Alle mål, vi hidtil har konstrueret, havde enten som udgangspunkt en mængdefunktion på en "beskeden" brolægning (tænk på Lebesgue- og Lebesgue-Stieltjes målene) eller allerede konstruerede mål (tænk f.eks. på ubestemt integral, billedmål eller produktmål). Vi vælger nu et helt andet udgangspunkt, nemlig en *funktional.* Der er ingen grund til at give en helt fast definition heraf. Det væsentlige er, at vi ser på visse funktioner f defineret på en mængde X. Funktionalen er så en afbildning $f \curvearrowright T(f)$, der til enhver af de betragtede funktioner knytter et tal $T(f)$ på en "lineær" måde, dvs. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ skal gælde. Det spørgsmål, vi stiller os, er under hvilke omstændigheder "stammer" funktionalen fra et mål μ i den forstand, at $T(f) = \int f d\mu$. Dette spørgsmål har et væld af præcise udformninger og litteraturen, der indeholder svar herpå er righoldig (se evt. (Batt, 1973) eller (Pollard og Topsøe, 1975)). Et gennemgående træk er, at det ganske ofte lykkes at finde sådanne repræsentationer selv ud fra tilsyneladende beskedne forudsætninger.

Én metode, man kan anvende til at udlede de ønskede sætninger, er at udnytte resultaterne i §4.6 via formlen

$$\lambda(K) = \inf_{f \geq 1_K} T(f). \tag{6.24}$$

Så fås en mængdefunktion på de betragtede K'er. Er man heldig, kan λ udvides til et mål, som så måske løser problemet.

Langt de vigtigste situationer er af topologisk art. Vi indskrænker os til at vise et klassisk resultat, hvor udgangspunktet er rummet $C_c^+(X)$ af ikke-negative kontinuerte funktioner med kompakt støtte, se §3.5.

Definition 6.4.1 Vi siger, at $T : C_c^+(X) \to [0, \infty[$ er en *positiv lineær funktional* på $C_c^+(X)$ såfremt T er additiv ($T(f+g) = T(f) + T(g)$) og monoton ($f \leq g \Rightarrow T(f) \leq (T(g))$.

Det er klart, at en positiv lineær funktional på $C_c^+(X)$ virkelig er lineær, dvs. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ gælder. Her som i definitionen er det underforstået, at f og g betegner funktioner i $C_c^+(X)$ (og at α og β er ikke-negative konstanter).

Vi får brug for et hjælperesultat:

Sætning 6.4.1 *Lad $X = (X, d)$ være et metrisk rum. For enhver endelig familie $F_1, \cdots, F_n$ af parvis disjunkte lukkede delmængder af X findes kontinuerte ikke-negative funktioner $h_1, \cdots, h_n$ på X, så $h_i = 1$ på F_i; $i \leq n$ og $h_1 + \cdots + h_n = 1$.*

Bevis. For en delmængde $H \subseteq X$ definerer vi funktionen $x \curvearrowright d(x, H)$ ved

$$d(x, H) = \inf_{y \in H} d(x, y).$$

Ved hjælp af trekantsuligheden efterviser man let den afstandsformindskende egenskab

$$|d(x, H) - d(y, H)| \leq d(x, y).$$

Funktionen $d(\cdot, H)$ er dermed kontinuert. Bemærk, at hvis H er lukket, er $d(x, H) = 0$ ensbetydende med at $x \in H$.

Se nu på givne F'er som i sætningen. For hvert $\nu \leq n$ sætter vi $F_\nu^* = \bigcup_{k \neq \nu} F_k$ $(= F \setminus F_\nu$ med $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n)$. Så opfylder funktionerne

$$h_\nu(x) = \frac{d(x, F_\nu^*)}{d(x, F_1^*) + \cdots + d(x, F_n^*)}; \quad \nu \leq n$$

de stillede krav. $\square$

Der er ingen mening i at interessere sig for $C_c^+(X)$ med mindre dette funktionsrum er "tilstrækkeligt righoldigt". Man kan f.eks. risikere, at $C_c^+(X)$ kun indeholder 0-funktionen (det gælder f.eks., hvis $X = \mathbb{Q}$!). For at sikre, at $C_c^+(X)$ er righoldig nok, skal vi antage, at X er *lokalkompakt,* se (Berg 97). Til vores brug kan vi nøjes med at konstatere, at de euklidiske rum $X = \mathbb{R}^n$ er velegnede. Specielt noterer vi, at for en vilkårlig kompakt mængde K i et euklidisk rum X og et vilkårligt $x \notin K$ findes $f \in C_c^+(X)$, så $f = 1$ på K og $f(x) = 0$. For at se det, sæt $\rho = d(x, K)$ og $F = \{y \mid d(y, K) \geq \rho\}$. Her betegner d den sædvanlige euklidiske metrik. Funktionen h_1 fra Sætning 1 hørende til K, F opfylder da betingelserne. At h_1 har kompakt støtte skyldes, at $h_1 = 0$ på F og at $\complement F$ er begrænset og dermed relativt kompakt. Faktisk viser dette ræsonnement, at der findes en følge f_n af funktioner i $C_c^+(X)$, så $f_n \downarrow 1_K$.

Vi formulerer nu en klassisk hovedsætning om repræsentation af funktionaler via mål. Det bevis, vi giver, dækker de lokalkompakte metriserbare rum. Læseren kan gerne nøjes med at notere, at ræsonnementet gælder i et euklidisk rum. Den mere ambitiøse læser vil se, at resultatet gælder i vilkårlige lokalkompakte Hausdorff rum og at dette er den helt rigtige ramme.

Sætning 6.4.2 (Riesz' repræsentationssætning) *Lad X være et lokalkompakt metriserbart topologisk rum og T en positiv lineær funktional på $C_c^+(X)$. Der findes da et entydigt bestemt Radon mål μ som* repræsenterer *T i den forstand, at $T(f) = \int f d\mu$ for alle $f \in C_c^+(X)$.*

Bevis. Antag først, at Radon målet μ repræsenterer T. Lad $K \in \mathcal{K}(X)$. Så vil mængden af $f \in C_c^+(X)$ med $f \geq 1_K$ filtrere nedad mod 1_K[5], hvorfor $\mu(K)$ må være infimum af $T(f)$ over disse f'er. Ud fra T fås altså μ på kompakte mængder og dette bestemmer μ entydigt.

Vi viser nu den væsentlige del af sætningen, eksistensen. For $K \in \mathcal{K}(X)$ defineres λ ved (6.24). Ifølge det netop sagte, er λ det eneste håb for μ's restriktion til $\mathcal{K}(X)$. Det første skridt på vejen er at vise, at λ er et Radon indhold (se Definition 6.3.3).

Antag derfor, at $K_1 \subseteq K_2$. Vælg, til $\varepsilon > 0$, $f_1 \geq 1_{K_1}$, så $\lambda(K_1) \geq T(f_1) - \varepsilon$. For $0 < \rho < 1$ sætter vi $K_\rho = K_2 \cap \{f_1 \leq \rho\}$. Hvis nu $f \geq 1_{K_\rho}$ (med $f \in C_c^+(X)$), vil $f + \rho^{-1} f_1 \geq 1_{K_2}$, hvorfor $T(f + \rho^{-1} f_1) \geq \lambda(K_2)$, hvoraf

$$T(f) \geq \lambda(K_2) - \rho^{-1}(\lambda(K_1) + \varepsilon).$$

Så må $\lambda(K_\rho) \geq \lambda(K_2) - \rho^{-1}(\lambda(K_1) + \varepsilon)$. Heraf ses, at

$$\sup_{K \subseteq K_2 \setminus K_1} \lambda(K) \;\geq\; \lambda(K_2) - \lambda(K_1).$$

Imidlertid må også den modsatte ulighed gælde her, thi hvis K_1 og K er disjunkte, må $\lambda(K_1) + \lambda(K) \leq \lambda(K_1 \cup K)$. For at se det udnyttes Sætning 1. Til $f \geq 1_{K_1 \cup K}$ bestemmes $0 \leq h_1, h \leq 1$ kontinuerte med $h_1 \geq 1_{K_1}$, $h \geq 1_K$ og $h_1 + h = 1$. Så vil

$$T(f) = T(f(h_1 + h)) = T(fh_1) + T(fh) \geq \lambda(K_1) + \lambda(K).$$

og dermed må $\lambda(K_1 \cup K) \geq \lambda(K_1) + \lambda(K)$.

Vi har nu vist, at λ er et Radon indhold.

Lad μ betegne udvidelsen af λ til et Radon mål. Lad $f \in C_c^+(X)$. Vi mangler så at vise, at $\int f d\mu = T(f)$. Uligheden "$\leq$" indses som følger. Ved at approksimere f som sædvanlig med simple funktioner og udnytte, at μ er et Radonmål ses, at det, vi skal vise er, at såfremt $K_1, \cdots, K_n$ er parvis disjunkte og den simple funktion $\alpha_1 1_{K_1} + \cdots + \alpha_n 1_{K_n}$ er $\leq f$, så vil $\alpha_1 \lambda(K_1) + \cdots + \alpha_n \lambda(K_n) \leq T(f)$. Hertil bemærkes, at der i henhold til Sætning 1 findes kontinuerte funktioner $h_1 \geq 1_{K_1}, \cdots, h_n \geq 1_{K_n}$ så $h_1 + \cdots + h_n = 1$. Så vil

$$T(f) = T(f(h_1 + \cdots + h_n)) = T(fh_1) + \cdots + T(fh_n) \geq \alpha_1 \lambda(K_1) + \cdots + \alpha_n \lambda(K_n),$$

som ønsket.

[5] Ræsonnementet ovenfor udvides let fra det euklidiske tilfælde til det lokalkompakte, metriserbare.

Nu mangler vi at vise, at $T(f) \leq \int f d\mu$. Vi kan gerne antage, at en given funktion $f \in C_c^+(X)$ opfylder $0 \leq f \leq 1$. Sæt $K = \text{supp(f)}$. Vælg $f_K \geq 1_K$ i $C_c^+(X)$, så $f_K = 1$ på K. For et foreløbig fastholdt $n \geq 2$ ser vi på de kompakte mængder $K_\nu = \{f \geq \nu/n\}$; $\nu = 1, \cdots, n$. Vi har

$$f - \frac{1}{n} \leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} 1_{K_\nu} \leq f,$$

og finder

$$\int f d\mu \geq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} \lambda(K_\nu) \geq \inf\{T(h) \mid h \geq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n} 1_{K_\nu}\}. \tag{6.25}$$

Anden ulighed følger ved for hvert $\nu = 1, \cdots, n$ at vælge $h_\nu \in C_c^+(X)$ så $1_{K_\nu} \leq h_\nu$, og så $T(h_\nu)$ er ganske tæt på $\lambda(K_\nu)$. Så vil $h = \sum_1^n h_\nu/n \in C_c^+(X)$ og $T(h)$ vil være tæt på $\sum_1^n \lambda(K_\nu)/n$.

For at vurdere infimum i (6.25) nedadtil, ser vi på en funktion $h \in C_c^+(X)$, så $\sum_1^n n^{-1} 1_{K_\nu} \leq h \leq f$. Så vil $f - h \leq n^{-1} 1_K \leq n^{-1} f_K$. Derfor er

$$T(f) - T(h) \leq \frac{1}{n} T(f_K),$$

hvilket giver den ønskede vurdering nedadtil. Af (6.25) fås så

$$\int f d\mu \geq T(f) - \frac{1}{n} T(f_K).$$

Lader vi her $n \to \infty$, følger $\int f d\mu \geq T(f)$, som ønsket. $\square$

6.5 Konvergens af mål

Nu stiger kunsten! Vi spørger efter fornuftige konvergensbegreber for mål på topologiske rum. Er X et topologisk rum, kan vi tale om konvergens af punkterne i $X : x_n \to x$. For visse afbildninger $f : x \curvearrowright f(x)$ kan vi tale om konvergens: $f_n \to f$ (punktvis, uniformt, næsten overalt osv.). Og nu spørger vi om konvergens for visse afbildninger $f \curvearrowright T(f)$ eller $f \curvearrowright \int f d\mu$. Det er ikke bare en matematisk leg. Der er god mening i det, både set fra et funktionalanalytisk og fra et sandsynlighedsteoretisk synspunkt. Mest overbevisende er en sandsynlighedsteoretisk motivation, synes jeg.

Udgangspunktet er et metriserbart topologisk rum X. Lad $(\mu_n)_{n \geq 1}$ være en følge af sandsynlighedsmål på $\mathcal{B}(X)$ og lad μ være et sandsynlighedsmål på $\mathcal{B}(X)$ som vi opfatter som et muligt grænsemål. Hvad "bør" det betyde, at $\mu_n \to \mu$? Vi tænker på μ_n'erne som modeller for et stokastisk fænomen og spørger så, hvad det vil sige, at μ er en grænsemodel. Som eksempel kunne vi tænke på $X = \mathbb{R}$ og μ_n fordelingen af den

n'te normerede sum svarende til en følge af uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable. – Så er en normalfordeling det fornuftige grænsemål, som vi ved fra den centrale grænseværdisætning. Måske kunne vi finde på at foreslå, at $\mu_n \to \mu$ skal betyde, at $\mu_n(A) \to \mu(A)$ for alle $A \in \mathcal{B}(X)$ eller måske blot for topologisk pæne mængder (åbne, lukkede eller kompakte). At dette ikke er et brugbart forslag, kan vi indse ved at tænke på en ekstremt simpel situation, hvor μ_n'erne og μ er Dirac mål: $\mu_n = \varepsilon_{x_n}$, $\mu = \varepsilon_x$. Her er det naturligt, at $\mu_n \to \mu$ bør betyde, at $x_n \to x$. Men så vil $\mu_n(A)$ ikke konvergere mod $\mu(A)$ for $A = \{x\}$ (med mindre $x_n = x$ f.v.t.). På den anden side ser det ud til at være rimeligt at forlange, at hvis $\mu(A)$ er stor (her $= 1$) og A er åben, vil $\mu_n(A)$ også være stor for $n \to \infty$. Betragtninger af denne karakter leder til et fornuftigt begreb.

Lad os indføre nogle betegnelser for klassen af mål, vi vil se på.

Definition 6.5.1 Lad X være metriserbar. Med $M_+(X,t)$ betegnes mængden af endelige Radon mål på X. For delmængden af sandsynlighedsmål bruges betegnelsen $M_+^1(X,t)$ og for delmængden af $\mu \in M_+(X,t)$ med $\mu(X) \leq 1$ bruges betegnelsen $M_+^{1\cdot}(X,t)$.

Betegnelserne er ikke fast standard. Bogstavet "t" er valgt for "tight", altså stram, og skal minde om at Radon mål og stramme indhold på $\mathcal{K}(X)$ (altså Radon indhold) egentlig kommer ud på ét. Man kan anvende betegnelser som $M_+(X,\tau)$ og $M_+(X,r)$ for τ-regulære, hhv. regulære mål. Vi holder os nu til Radon målene.

Det konvergensbegreb, vi er ude efter, fastlægges i følgende sætning:

Sætning 6.5.1 *Lad X være metriserbar og $(\mu_n)_{n\geq 1}$ og μ mål i $M_+(X,t)$. Så er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X) \ \wedge\ \forall G \in \mathcal{G}(X) : \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(X) = \mu(X) \ \wedge\ \forall F \in \mathcal{F}(X) : \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

(iii) $\forall f \in C_b(X) : \lim_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$

Bevis. (i) og (ii) er klart ækvivalente.

Antag nu, at (ii) gælder. Lad $f \in C_b(X)$ og antag først, at $0 \leq f \leq 1$. Så vil, for ethvert $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} 1_{\{f\geq\frac{\nu}{k}\}} \leq f \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k} 1_{\{f\geq\frac{\nu}{k}\}}$$

og vi finder

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int f d\mu_n &\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\mu_n(X) + \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k}\mu_n(\{f \geq \frac{\nu}{k}\})\right)\\ &\leq \frac{1}{k}\mu(X) + \frac{1}{k}\sum_{\nu=1}^{k}\mu\left(\{f \geq \frac{\nu}{k}\}\right)\\ &\leq \frac{1}{k}\mu(X) + \int f d\mu.\end{aligned}$$

Vi slutter, at $\limsup \int f d\mu_n \leq \int f d\mu$. Ved at betragte funktioner af typen $\alpha f + c$ med $\alpha \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ ses, at den fundne lim sup-ulighed gælder alle funktioner i $C_b(X)$. Udnyttes dette med f erstattet af $-f$ ses, at der også gælder en liminf-ulighed: $\liminf \int f d\mu_n \geq \int f d\mu$. Vi slutter, at så må (iii) gælde.

Antag dernæst, at (iii) gælder. For $f = 1$, fås så, at $\mu_n(X) \to \mu(X)$. Lad os eftervise den anden betingelse i (i) og antag derfor, at $G \in \mathcal{G}(X)$. For enhver kompakt mængde $K \subseteq G$ kan vi bestemme $f \in C_b(X)$ med $1_K \leq f \leq 1_G$ (udnyt Sætning 6.4.1 på parret $K, \complement G$). Så vil

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \liminf_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu \geq \mu(K).$$

Da dette gælder enhver kompakt mængde $\subseteq G$, følger det nu, at $\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G)$. $\square$

Definition 6.5.2 Lad μ_n; $n \geq 1$ og μ være mål i $M_+(X,t)$, X metriserbar. Såfremt én, og dermed alle betingelserne i Sætning 6.4.1 gælder, siger vi, at μ_n konvergerer svagt mod μ og skriver $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$.

Advarsel. I funktionalanalysen er denne terminologi lidt farlig; man burde tale om "svag-stjerne" konvergens.

Bemærkninger. Med lidt mere generel topologi til rådighed end vi vil forudsætte her, indføres en topologi på $M_+(X,t)$, så konvergens for følger netop bliver svag konvergens som defineret ovenfor. Dette kan gennemføres for meget generelle topologiske rum. Så bliver egenskaben (i) eller (ii) det fornuftigste udgangspunkt. Den teoridannelse, man herved kan udvikle er af central betydning i sandsynlighedsregning. Se (Parthasarathy, 1967), (Billingsby, 1968) eller (Topsøe, 1970). Nedenfor, og i opgaverne, berører vi kun enkelte vigtige aspekter.

Sætning 6.5.2 *Grænsemålet for en svagt konvergent følge af mål i $M_+(X,t)$, X metriserbar, er entydigt bestemt.*

Bevis. Antag, at $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$ og at $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \eta$. For en vilkårlig mængde $A \subseteq X$ er så

$$\mu(\mathring{A}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{A}) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\bar{A}) \leq \eta(\bar{A}).$$

Så er det ikke svært at se, at $\mu \leq \eta$ må gælde: Til $A \in \mathcal{B}(X)$ bestemmes K og K' kompakte, så $K \subseteq A$ og $\mu(K) \approx \mu(A)$ og $K' \subseteq \complement A$ og $\eta(K') \approx \eta(\complement A)$.

Figur 20

Vi kan så finde disjunkte åbne mængder $G \supseteq K$ og $G' \supseteq K'$ og konkluderer

$$\mu(A) \approx \mu(K) \leq \mu(G) \leq \eta(\bar{G}) \leq \eta(\complement G') \leq \eta(\complement K') \approx \eta(A).$$

Da $\mu(X) = \eta(X)$, må $\mu = \eta$. $\square$

Definition 6.5.3 Lad $\mathcal{P} \subseteq M_+(X,t)$, X metriserbar. Familien $\mathcal{P}$ siges at opfylde *Prohorovs betingelse,* eller at være *stram,* såfremt der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes $K \in \mathcal{K}(X)$, så det for alle $\mu \in \mathcal{P}$ gælder, at $\mu(\complement K) < \varepsilon$.

Sætning 6.5.3 (Prohorov's sætning) *Lad X være separabel metriserbar og $\mathcal{P} \subseteq M_+(X,t)$ en familie af mål som opfylder Prohorov's betingelse og betingelsen*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}} \mu(X) < \infty.$$

Så indeholder enhver følge $(\mu_n)_{n \geq 1}$ af mål i $\mathcal{P}$ en svagt konvergent delfølge.

$*$**Bevis.** Vi vælger en tællelig basis $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}(X)$ som er $(\cup f, \cap f)$-stabil og indeholder X. Til en vilkårlig følge $(\mu_n)_{n \geq 1}$ på $\mathcal{P}$ udtager vi (diagonalmetoden!) en delfølge $(\mu_{n_k})_{k \geq 1}$ så $\lim_{k \to \infty} \mu_{n_k}(G)$ eksisterer for enhver mængde $G \in \mathcal{G}$. Vi kan gerne antage, at $\lim \mu_n(G)$ eksisterer for alle $G \in \mathcal{G}$ (udtynding *er* foretaget). Vi viser, at så må (μ_n) være konvergent. Idéen er at konstruere et Radon indhold efter følgende formel:

$$\lambda(K) = \inf_{G \supseteq K, G \in \mathcal{G}} \lim_{n \to \infty} \mu_n(G)\,; \quad K \in \mathcal{K}(X). \tag{6.26}$$

Det ses let, at $\sup\{\lambda(K) \mid K \in \mathcal{K}(X)\} < \infty$ og at λ er superadditiv ($K_1 \cap K_2 = \emptyset \Rightarrow \lambda(K_1 \cup K_2) \geq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$). Lad nu $K_1 \subseteq K_2$. Bestem $G_1 \in \mathcal{G}$, så $G_1 \supseteq K_1$ og $\lambda(K_1) \approx \lim \mu_n(G_1)$. Sæt $K = K_2 \setminus G_1$. Hvis $G \supseteq K$, $G \in \mathcal{G}$ og $\lim \mu_n(G) \approx \lambda(K)$, vil $G \cup G_1 \supseteq K_2$, hvorfor

$$\begin{aligned}\lambda(K_2) \leq \lim_{n \to \infty} \mu_n(G \cup G_1) &\leq \lim_{n \to \infty} \mu_n(G) + \lim_{n \to \infty} \mu_n(G_1)\\ &\approx \lambda(K) + \lambda(K_1).\end{aligned}$$

Vi kan nu konkludere, at λ er et Radon indhold. Lad μ være det Radon mål, λ bestemmer.

Vi vil eftervise betingelserne i (i), Sætning 1 og betragter først en åben mængde G. Vælg $K \subseteq G$, så $\mu(K) \approx \mu(G)$. Vælg $G_0 \in \mathcal{G}$, så $K \subseteq G_0 \subseteq G$. Så vil

$$\mu(G) \approx \mu(K) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n(G_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G).$$

Vi slutter, at den anden betingelse i (i), Sætning 1 er opfyldt. Endvidere er det klart, at $\mu(X) \leq \lim \mu_n(X)$. For at vise den modsatte ulighed udnyttes Prohorov's betingelse. Til $\varepsilon > 0$ vælges K, så $\mu_n(\complement K) < \varepsilon$ for alle $n \geq 1$. Så vil

$$\begin{aligned}
\mu(X) \geq \mu(K) = \lambda(K) &= \inf_{G \supseteq K, G \in \mathcal{G}} \lim_{n\to\infty} \mu_n(G) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \\
&= \limsup_{n\to\infty} (\mu_n(X) - \mu_n(\complement K)) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \mu_n(X) - \varepsilon
\end{aligned}$$

og vi kan slutte, at $\mu(X) = \lim \mu_n(X)$. Vi konkluderer, at $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$. $\square$

I funktionalanalyse optræder en svagere form for konvergens af mål, for hvilken man tillader, at "masse forsvinder (i uendelig)". Således tillades f.eks. at ét-punkts-målene ε_n; $n \geq 1$ på $\mathbb{N}$ konvergerer mod nul-målet.

Definition 6.5.4 En følge $(\mu_n)_{n\geq 1}$ af mål i $M_+^{1\cdot}(X,t)$ *konvergerer vagt* mod $\mu \in M_+^{1\cdot}(X,t)$, og vi skriver $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$, såfremt følgende to betingelser er opfyldt:

$$\begin{aligned}
\forall G \in \mathcal{G}(X) &: \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G) \\
\forall K \in \mathcal{K}(X) &: \limsup \mu_n(K) \leq \mu(K).
\end{aligned}$$

Sætning 6.5.4 *Grænsemålet for en vagt konvergent følge af mål i $M_+^{1\cdot}(X,t)$, X metriserbar, er entydigt bestemt*

Denne sætning er faktisk stærkere end Sætning 2. Beviset bygger på et "trick" – det samme vi benyttede i beviset for at ethvert Radon mål er lokalt endeligt (Sætning 6.3.1) – og henvises til en opgave (Opgave 37).

Sætning 6.5.5 *Lad X være separabel og metriserbar. Da indeholder en vilkårlig følge af mål i $M_+^{1\cdot}(X,t)$ en vagt konvergent delfølge.*

$*$**Bevis.** Kopier beviset for Prohoros's sætning. Notér til aller sidst i beviset, at uden Prohorov's betingelse sluttes $\limsup \mu_n(K) \leq \mu(K)$ for alle $K \in \mathcal{K}(X)$. $\square$

6.6 Fraktaler

Alle har vel hørt om en nyere, måske lidt modepræget gren af matematikken, der er forbundet med studiet af dynamiske systemer og begreber som “kaos”, “strange attractors” og “fraktaler”. Varen sælger godt – de smukke billeder, Mandelbrot mængden og mange andre fraktaler. Her vil vi slet ikke komme ind på dynamiske systemer, men vi vil fortælle, hvad en fraktal er. Vi vælger en præcis definition, der dog ikke kan siges at være universelt accepteret. Lad os gribe det lidt bagvendt an:

Definition 6.6.1 En *fraktal* i et euklidisk rum $\mathbb{R}^n$ er en delmængde A af $\mathbb{R}^n$ med brudden Hausdorff dimension, $\dim(A)$, dvs. $\dim(A) \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$.

Men hvad forstår vi ved Hausdorff dimensionen?

Definition 6.6.2 Lad (X, d) være et metrisk rum. Så defineres *Hausdorff dimensionen* $\dim(A)$ af $A \subseteq X$ ud fra Hausdorff målene H^s; $s \geq 0$ ved formlen

$$\dim(A) = \sup\{s \geq 0 \mid H^s(A) = \infty\}.$$

Hvis $H^\circ(A) < \infty$, sættes $\dim(A) = 0$.
– Og hvad er så Hausdorff målene for noget?

Definition 6.6.3 Lad $X = (X, d)$ være et metrisk rum og betegn med $|\cdot|$ diameteren af delmængderne af X (speciel notation, der kun bruges i denne §). For ethvert $0 \leq s < \infty$ defineres mængdefunktionen $H^s : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ved

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A), \tag{6.27}$$

hvor

$$H^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|^s \;\middle|\; |E_n| \leq \delta\,;\; n \geq 1\,,\; \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq A \right\}. \tag{6.28}$$

Restriktionen af H^s til $\mathcal{B}(X)$ er det *s-dimensionale Hausdorff mål* på X.

I henhold til Sætning 4.6.13 *er* $H^s \mid \mathcal{B}(X)$ et mål. Ofte omtales også H^s selv som det s-dimensionale Hausdorff mål i X, men det er nu kun et ydre mål (loc.cit.). Vi noterer også, at for hvert δ er H^s_δ et ydre mål (anvend Sætning 4.6.2).

Lad os til senere brug indføre den sprogbrug, at mængderne E_n, der optræder i (6.28) er en *δ-overdækning* af A og at $\sum |E_n|^s$ er *s-værdien* hørende til overdækningen.

I $\mathbb{R}^n$ er det n-dimensionale Hausdorff mål proportional med Lebesgue målet λ_n og proportionalitetsfaktoren er det reciprokke n-dimensionale volumen af enhedskuglen i $\mathbb{R}^n$. Denne vigtige kendsgerning er ikke helt ligetil at vise og vi springer det over i denne udgave af noterne og henviser til (Falconer, 1984). Vi bemærker dog, at det er let at vise, at $H^n(A) < \infty$ for enhver begrænset delmængde A af $\mathbb{R}^n$, se Opgave 38.

Lad, i det følgende, $X = (X, d)$ betegne et euklidisk rum. Sådan set kan betragtningerne nedenfor gennemføres for normerede vektorrum med mindre variationer.

Sætning 6.6.1 *Lad A være en uendelig delmængde af X. Så kan $s_0 = \dim(A)$ karakteriseres ved at $H^s(A) = \infty$ for $0 \leq s < s_0$ og $H^s(A) = 0$ for $s > s_0$.*

Bevis. Antag $H^s(A) < \infty$. Se på $H^{s+t}(A)$ med et $t > 0$. Ved i (6.28) at anvende uligheden $|E_n|^{s+t} \leq |E_n|^s \cdot \delta^t$ ses, at for $\delta > 0$ vil $H^{s+t}_\delta(A) \leq H^s_\delta(A) \leq H^s_\delta(A) \cdot \delta^t \leq H^s(A) \cdot \delta^t$. Derfor vil $H^{s+t}(A) = 0$. Heraf følger resultatet. □

Definition 6.6.4 En delmængde A af X er en s_0-*mængde*, hvis $0 < H^{s_0}(A) < \infty$.

Det følger af Sætning 1, at en s_0-mængde har Hausdorff dimension s_0. Vi vil udnytte dette til at bestemme Hausdorff dimensionen af visse specielle mængder.

Definition 6.6.5 Lad $0 < \xi < 1$. Ved en ξ-*kontraktion* vil vi her forstå en surjektiv affin afbildning φ af X på sig selv, så $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \xi \cdot d(x, y)$.

At φ er affin betyder som bekendt, at det for alle $x_0, x_1 \in X$ og alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\varphi(x_0 + \alpha(x_1 - x_0)) = \varphi(x_0) + \alpha(\varphi(x_1) - \varphi(x_0)).$$

Definition 6.6.6 Lad $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ og lad, for $i \leq N$, $\xi_i \in]0, 1[$. En delmængde $K \subseteq X$ siges at være *selv-similær af type* $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$, såfremt der findes en klassedeling $K = K_1 \cup \cdots \cup K_N$ af K og ξ_i-kontraktioner $\varphi_i : X \to X; i \leq N$, så $\varphi_i(K) = K_i; i \leq N$. Såfremt ξ_i'erne er ens: $\xi_i = \xi; i \leq N$, er K *selv-similær af type* $(N; \xi)$.

Antag, at $K = \bigcup_1^N K_i$ er selv-similær af type $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$. Det er så klart, at

$$H^s_{\xi_i \cdot \delta}(K_i) = \xi_i^s H^s_\delta(K),$$

hvoraf

$$H^s(K_i) = \xi_i^s H^s(K).$$

Er K målelig, bliver også K_i'erne målelige, og vi finder for $s \geq 0$, at

$$H^s(K) = \sum_{i=1}^N H^s(K_i) = \sum_{i=1}^N \xi_i^s H^s(K) = (\sum_{i=1}^N \xi_i^s) H^s(K).$$

Hvis derfor s_0 betegner det entydigt bestemte tal, så

$$\sum_{i=1}^N \xi_i^{s_0} = 1, \tag{6.29}$$

må det for alle $s \geq s_0$ gælde, at $H^s(K)$ enten er 0 eller ∞. Dette indicerer, at $\dim(K) = s_0$. Er K kompakt og ξ_i'erne ens, kan vi vise dette:

Sætning 6.6.2 *Antag, at K er en kompakt delmængde af X som er selv-similær af type $(N;\xi)$. Så er*

$$\dim(K) = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{\xi})}. \tag{6.30}$$

Bevis. Lad $s_0 = \log N/(-\log\xi)$. Så gælder, (6.29). Vi viser, under de givne omstændigheder, at K er en s_0-mængde. Med $K_i; i \leq N$ betegnes K's komponenter i henhold til Definition 6.

Det er let at se, at $H^{s_0}(K) < \infty$: For et $\delta > 0$ (der gerne kan vælges til 1), vil

$$H^{s_0}_{\xi\delta}(K) \leq \sum_{i=1}^{N} H^{s_0}_{\xi\delta}(K_i) = \sum_{i=1}^{N} \xi^{s_0} H^{s_0}_{\delta}(K) = H^{s_0}_{\delta}(K).$$

Itereres dette, fås

$$H^{s_0}_{\xi^n\delta}(K) \leq H^{s_0}_{\delta}(K)\,; \quad n \geq 1.$$

Lader vi her $n \to \infty$, finder vi $H^{s_0}(K) \leq H^{s_0}_{\delta}(K)$ (og dermed gælder der "=" her). Da K er kompakt, er det imidlertid klart, at $H^{s_0}_{\delta}(K) < \infty$. Derfor må $H^{s_0}(K) < \infty$.

Det er sværere at vise, at $H^{s_0}(K) > 0$. Vi vælger først $\delta > 0$ mindre end den mindste af afstandene $d(K_i, K_j)$; $i \neq j$ (kan lade sig gøre, da alle K_i'erne er kompakte). Vi vil vise, at for enhver δ-overdækning $\mathcal{U}$ af K vil den tilhørende s_0-værdi, som vi betegner $|\mathcal{U}|^{s_0}$, være $\geq \delta^{s_0}$. Så må $H^{s_0}(K) \geq \delta^{s_0} > 0$. Lad derfor $\mathcal{U}$ være en δ-overdækning af K. Vi kan (og vil!) antage, at $\mathcal{U}$ er endelig. Betragt algoritmen givet ved skemaet i Figur 21.

Da den mindste diameter i den konstruerede overdækning vokser med en faktor $\frac{1}{\xi}$ for hvert gennemløb af løkken i algoritmen, må algoritmen stoppe.

Figur 21

For hvert gennemløb aftager s_0-værdien; dette ses af at

$$\begin{aligned} |\mathcal{W}|^{s_0} &= \left(\frac{1}{\xi}\right)^{s_0} |\mathcal{U}_{i_0}|^{s_0} \leq \left(\frac{1}{\xi}\right)^{s_0} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\mathcal{U}_i|^{s_0} \\ &= \left(\frac{1}{\xi}\right)^{s_0} \frac{1}{N} |\mathcal{U}|^{s_0} = |\mathcal{U}|^{s_0}. \end{aligned}$$

Når algoritmen stopper, er $|\mathcal{W}|^{s_0} \geq \delta^{s_0}$, da $\mathcal{W}$ så indeholder en mængde med diameter $> \delta$.

Alt i alt ses $|\mathcal{U}|^{s_0} \geq \delta^{s_0}$, som bebudet. □

Sætning 6.6.3 *For Cantor mængden $C \subseteq [0,1]$ er*

$$\dim(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Bevis. Dette følger af Sætning 2 ved at se på $C = (C \cap [0, \frac{1}{3}]) \cup (C \cap [\frac{2}{3}, 1])$. Overvej! □

Bemærkning. Der gælder kraftigere resultater end Sætning 2, således at man kan tillade, at mængderne K_i; $i \leq N$ i definitionen af selv-similære mængder kan tillades at have et lille overlap. Herved kan dimensionen af mængder som f.eks. Sierpinski mængden fra §1.2, Øvelse 6 beregnes. Der henvises til (Falconer, 1984), §8.

Opgaver til Kapitel VI[6]

Opgave 1. Bevis *Egoroff's sætning*: Hvis $\mu(X) < \infty$ og f_n; $n \geq 1$ og f er reelle målelige funktioner på X, så $f_n \to f$ næsten overalt, vil $f_n \to f$ *næsten uniformt,* dvs. for alle $\varepsilon > 0$ findes $X_0 \in \mathcal{B}$ så $\mu(\complement X_0) < \varepsilon$ og så $f_n \to f$, uniformt på X_0.

Der gælder også et omvendt (men mindre interessant) resultat, nemlig hvilket? Undersøg også, om næsten uniform konvergens medfører konvergens i mål.

Opgave 2. Nedenfor har vi påbegyndt udfyldelsen af en tabel med opregning af

konvergens i mål	$+$	$+$
konvergens n.o.	$+$	$+$
konvergens i middel	$+$	$-$

muligheder vedrørende konvergens hhv. i mål, næsten overalt og i middel. F.eks. betyder første søjle med de tre plusser, at alle tre former for konvergens kan gælde samtidig. Fuldfør tabellen. Markér endvidere, hvis en mulighed forsvinder for endelige målrum. Den energiske læser kan tilføje næsten uniform konvergens (se Opgave 1) til de undersøgte former for konvergens.

Opgave 3. Vis, at hvis f_n konvergerer mod f i middel og mod g næsten overalt, så er $f = g$ n.o.

Opgave 4. Bevis Fischers fuldstændighedssætning, Sætning 6.1.2 for et vilkårligt $1 \leq p < \infty$. *Vejledning.* Antag $\sum_1^\infty \|f_n\|_p < \infty$. Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} \int (\sum_{k=1}^{n} |f_k|)^p d\mu = \int (\sum_{k=1}^{\infty} |f_n|)^p d\mu.$$

Slut, at $\| \sum_1^\infty |f_n| \|_p \leq \sum_1^\infty \|f_n\|_p$ (anvend Minkowski's ulighed). Så er $f = \sum_1^\infty f_n$ overalt veldefineret og endelig, evt. efter modifikation på en nulmængde. Så let at se, at $f \in \mathcal{L}_p$ og $\|f_p\| \leq \sum_1^\infty \|f_n\|_p$. En anvendelse af Lebesgue's majorantsætning viser endelig, at $f = \sum_1^\infty f_n$, altså at $\|f - \sum_1^n f_k\|_p \to 0$.

Opgave 5. (i). Vis, at hvis f er integrabel, så vil

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\{|f|\geq t\}} |f| d\mu = 0.$$

(ii). En familie af funktioner $(f_i)_{i\in I}$ er *uniformt integrabel,* hvis

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq t\}} |f_i| d\mu = 0.$$

[6] Hvis ikke andet anføres i de enkelte opgaver, refererer opgaverne til et målrum $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Målelighed med videre skal forstås m.h.t. dette målrum. Er der tale om topologiske begreber, antages uden videre, at X er et topologisk rum (gerne metriserbart) og at $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$.

Vis, at hvis $\mu(X) < \infty$, så gælder, for en uniformt integrabel følge $(f_n)_{n\geq 1}$, at f_n konvergerer mod f i middel såfremt $f_n \to f$ n.o. *Vejledning.* Vis først, at $\int |f_n| d\mu$ er begrænset. Slut, at $\int |f| d\mu < \infty$. Sæt $h_n = |f_n - f|$ og bemærk, at $(h_n)_{n\geq 1}$ er uniformt integrabel. Skriv $\int h_n d\mu = \int_{\{h_n \geq t\}} h_n d\mu + \int_{\{h_n < t\}} h_n d\mu$ og slut, at $\int h_n d\mu \to 0$.

Opgave 6.(i). Bevis *Scheffé's lemma:* Lad $\delta_n; n \geq 1$ og δ være ikke-negative integrable funktioner og lad $\varphi_n; n \geq 1$ og φ betegne de ubestemte integraler af henholdsvis $\delta_n; n \geq 1$ og δ m.h.t. μ. Antag, at $\varphi_n(X) = \varphi(X) < \infty; n \geq 1$ og at $\delta_n \to \delta$ n.o. Så vil

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} |\varphi(B) - \varphi_n(B)| \leq \|\delta - \delta_n\|_1 \to 0.$$

Vejledning. Slut først, at $\int (\delta - \delta_n)^+ d\mu \to 0$. Udnyt dernæst betingelsen $\varphi_n(X) = \varphi(X) < \infty$.

(ii). Lad $M_+^1(\mathbb{N})$ være mængden af sandsynlighedsmål på $\mathbb{N}$ (med diskret Borelstruktur). Vis, at der kun er én fornuftig topologi på $M_+^1(\mathbb{N})$, idet den svagest tænkelige form for konvergens i $M_+^1(\mathbb{N})$ (naturligvis (?) punktvis konvergens: $\mu_n \to \mu$ såfremt $\mu_n(k) \to \mu(k)$ for alle $k \in \mathbb{N}$) medfører den stærkest tænkelige (nemlig givet ved at $\mu_n \to \mu$, såfremt $\sum_1^\infty |\mu_n(k) - \mu(k)| \to 0$).

Opgave 7. Vi siger, at $X_0 \subseteq X$ er *tyk* (evt. *μ-tyk*) *i en målelig mængde,* hvis der findes en målelig mængde Y, så $X_0 \subseteq Y$ og således, at enhver målelig delmængde af $Y \setminus X_0$ er en μ-nulmængde. Antag, at X_0 er tyk i en målelig mængde og lad Y opfylde betingelsen i definitionen. Sæt $\mathcal{B}_0 = \mathrm{tr}_{\mathrm{X}_0}(\mathcal{B})$. Vis, at der ved forskriften

$$\mu_0(X_0 \cap B) = \mu(Y \cap B)\,; \quad B \in \mathcal{B}$$

er defineret en mængdefunktion μ_0 på $\mathcal{B}_0$. Vis, at μ_0 er restriktionen af det ydre mål μ^* til $\mathcal{B}_0$ og vis, at μ_0 er et mål på $\mathcal{B}_0$ med $\mu_0(X_0) = \mu(Y)$.

Opgave 8. Find fejlen i følgende "bevis" for at $0 = 1$: Lad $(X_1, \mathcal{B}_1) = (X_2, \mathcal{B}_2) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ og sæt $\mu_1 =$ Lebesguemålet på X_1 og $\mu_2 =$ tællemålet på X_2 (indskrænket til $\mathcal{B}_2$). Er Δ diagonalen i $X_1 \times X_2$, har vi ifølge Fubini's sætning, at

$$\iint 1_\Delta(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) d\mu_2(x_2) = \iint 1_\Delta(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1),$$

eller $0 = 1$!

$*$**Opgave 9** (Ulam's sætning)**.** Et kardinaltal κ er *reelt måleligt,* hvis der findes et sandsynlighedsmål μ på $\mathcal{P}(X)$, hvor $\mathrm{card}\,(\mathrm{X}) = \kappa$, således, at enhver singleton har mål 0. Bevis, at $\aleph_1$, det første over-tællelige kardinaltal, ikke er reel måleligt (sammenlign med Opgave 4.8).

Vejledning: Lad $X = [0, \omega_1[$, hvor $\omega_1 (= \aleph_1)$ er det første over-tællelige ordinaltal. Sæt $A = \{(\alpha, \beta) \in X \times X \mid \alpha > \beta\}$. Så vil $A \in \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(X)$ thi A er den tællelige foreningsmængde af grafer for målelige funktioner og hver sådan graf er målelig (anvend Sætning 2.6.4 og beviset for Korollar 3.3.2). Hvis der fandtes et mål på X med de angivne egenskaber, kan Fubini's sætning anvendes.

Opgave 10. Antag, at μ er et sandsynlighedsmål og at $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$. Bevis, at

$$\int f d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq t\}) dt$$

(hvor "$\cdots dt$" refererer til integration m.h.t. Lebesgue-målet). *Vejledning:* Sæt $A = \{(x,t) \mid f(x) \geq t\} \subseteq X \times \mathbb{R}_+$. Vis, at $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Anvend Fubini.
Bemærkning: Formlen er ofte nyttig i sandsynlighedsregning. Den viser, hvordan beregning af middelværdier af ikke-negative stokastiske variable kan reduceres til at udregne et integral af "halesandsynlighederne" m.h.t. Lebesgue-målet.

$*$**Opgave 11.** Lad $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \eta)$ være endeligt funderede målrum (se evt. Opgave 4.6). Vis, at der findes et produktmål ζ af μ og η. *Vejledning:* Sæt $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) < \infty\}$ og $\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B} \mid \eta(B) < \infty\}$. Lad $\mathcal{K}_0$ betegne brolægningen i $X \times Y$ af endelige disjunkte foreninger af mængder af formen $A \times B$ med $A \in \mathcal{A}_0$, $B \in \mathcal{B}_0$. Bemærk, at $\mathcal{K}_0$ er en $(\emptyset, \cup f, \cap f, \setminus)$-lukket brolægning. Definer $\lambda : \mathcal{K}_0 \to [0, \infty[$ så λ bliver additiv og $\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \eta(B)$ for $A \times B \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{B}_0$. Hertil kan man f.eks. udnytte, at såfremt $A_n \times B_n$; $n \geq 1$ og $A_n^* \times B_n^*$; $n \geq 1$ er to følger af parvis disjunkte mængder i $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ med samme foreningsmængde, så er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n) \cdot 1_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(B_n^*) 1_{A_n^*},$$

hvorfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\eta(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^*)\eta(B_n^*).$$

Af ovenstående følger også, at λ er σ-kontinuert fra højre i $\emptyset$. Anvend Type II-udvidelsessætningen i §4.6 og bemærk, at alle mængder i $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ bliver målelige for denne udvidelse.
Bemærkning. For endeligt funderede målrum gælder ikke et entydighedsresultat som for σ-endelige målrum (se Opgave 13). Ser vi på restriktionen til $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ af målet konstrueret ovenfor, kan det karakteriseres som det mindste produktmål.

Opgave 12. Lad $(X_1, \mathcal{B}_1) = (X_2, \mathcal{B}_2) = ([0,1], \mathcal{P}([0,1]))$ og lad μ_2 være tællemålet på X_2 og μ_2 $(0,\infty)$-målet på X_2 ($\mu_2(B)$ er 0 eller ∞ eftersom B er tællelig eller ej). Vis, at der findes to forskellige produktmål på produkt-σ-algebraen. *Vejledning:* Det sædvanlige produktmål blev i hovedteksten konstrueret som et integral over et af faktorrummene. Anvend samme fremgangsmåde til at få to måske forskellige produktmål. At målene er forskellige, kan ses ved at beregne målet af diagonalen for de to mål. **Bemærkning:** Strukturen af produkt-σ-algebraen er ikke let at bestemme. Det hænger faktisk på, hvilken model for mængdelæren, man arbejder i. Gælder kontinuumshypotesen $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, drejer det sig om hele potensmængden $\mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ (vises med teknikken fra Opgave 9).

$*$**Opgave 13.** Konstruer (modulo visse mængdeteoretiske aksiomer) et eksempel på flertydighed af produktmål som i Opgave 12, men med begge faktormål endeligt funderede. *Vejledning:* Anvend idéen fra Opgave 12. Behold tællemålet μ_1. Nærliggende er det at lade μ_2 være Lebesguemålet på $[0,1]$. En vanskelighed her er, at $y \curvearrowright \mu_1(A^y)$ ikke behøver være Borelmålelig for en målelig mængde A (det skyldes problemet nævnt i advarslen s. 27). Man kunne se på Lebesgue-målelighed i stedet, men det kræver teori, vi ikke har udviklet. Problememt forsvinder, hvis vi arbejder i Solovay's model for mængdelæren omtalt i §1.3. En anden mulighed kunne være at antage, at $2^{\aleph_0}$ er reelt målelig (se Opgave 9) og så som μ_2 bruge et ikke-trivielt sandsynlighedsmål på $\mathcal{P}([0,1])$ (en model for mængdelæren med $2^{\aleph_0}$ reelt målelig er, så vidt jeg ved, konsistent med ZFC). Bemærk, at for de antydede muligheder er μ_2 et endeligt mål.

$*$**Opgave 14.** Vis, at hvis kontinuumshypotesen $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ gælder, findes en delmængde $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ så $x \curvearrowright \mu_2(A_x)$ og $y \curvearrowright \mu_1(A^y)$ begge er Borel-målelige, hvor $\mu_1 = \mu_2 =$ Lebesguemålet på $[0,1]$, og så

$$\int \mu_2(A_x) d\mu_1(x) \neq \int \mu_1(A^y) d\mu_2(y).$$

Vejledning: Anvend idéen fra Opgave 9 til at finde en mængde A, så alle x-sektioner er co-tællelige og alle y-sektioner tællelige.

Tilsyneladende strider dette mod Tonelli's sætning, hvis vi sætter $f(x,y) = 1_A(x,y)$. Forklar hvorfor der alligevel ikke er nogen modstrid.

Bemærkning. Resultatet viser et alternativ til konstruktionen i §1.3 af en ikke-Lebesguemålelig mængde, men kræver altså kontinuumshypotesen.

Opgave 15. Lad $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1) = (X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{tællemål})$. Definer f på X_1, X_2 ved

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{for } m = n \\ -1 & \text{for } m = n+1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Så giver udregning af de to dobbeltintegraler, der kan dannes ud fra f, forskellige værdier. Forklar, hvorfor dette ikke strider mod Fubini's sætning.

Opgave 16. Vis, at grafen for en Borel-målelig funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en Borelmængde i $\mathbb{R}^{n+1}$ med Lebesguemål 0.

Opgave 17. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ være målelig og sæt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid y \leq f(x)\}$. Vis den "sædvanlige" formel for beregning af arealet $|A|$ af A:

$$|A| = \int f(x) dx.$$

Her tænkes arealet af A defineret som det to-dimensionale Lebesguemål af A.

Udvid betragtningen til at gælde funktioner defineret på $\mathbb{R}^n$.

Opgave 18. Funktionen f er defineret næsten overalt på $[0,1] \times [0,1]$ (m.h.t. det to-dimensionale Lebesguemål) ved

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & 0 < x < y < 1 \\ -x^{-2}; & 0 < y < x < 1. \end{cases}$$

Udregn de to dobbeltintegraler, f giver anledning til og undersøg, om f er integrabel.

Opgave 19. I denne opgave betegner $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et sandsynlighedsfelt og alle σ-algebraer, der optræder, er forudsat at være del-σ-algebraer af $\mathcal{F}$.

En endelig familie $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ af σ-algebraer siges at være en *uafhængig* familie, såfremt

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1) \cdot \cdots \cdot P(B_n)$$

for alle $B_1, \cdots, B_n$ med $B_1 \in \mathcal{B}_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}_n$. En vilkårlig familie $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ af σ-algebraer er *uafhængig,* såfremt enhver endelig delfamilie er uafhængig.

(i). Vis, at begrebet uafhængighed for stokastiske variable kan formuleres som et krav om uafhængighed for en familie af σ-algebraer.

Illustrér, hvilke σ-algebraer, det drejer sig om, ved at se på eksemplet, hvor $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{F}$ = naturlige Borelstruktur, P = Lebesguemålet på Ω og de stokastiske variable er de to projektionsafbildninger $(x,y) \curvearrowright x$ og $(x,y) \curvearrowright y$.

(ii). Se på tilfældet med to σ-algebraer $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ og vis, at disse er uafhængige, såfremt $P(E \cap B) = P(E) \cdot P(B)$ for alle $E \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{B}_2$, hvor $\mathcal{E}$ er et $(\cap f)$-stabilt frembringersystem for $\mathcal{B}_1$.

(iii). Udvid egenskaben i (ii) og vis, for en familie $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ af σ-algebraer, at såfremt der findes en familie $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ af $(\cap f)$-stabile frembringersystemer for de respektive σ-algebraer $\mathcal{B}_i$ således, at

$$P\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \prod_{i \in I} P(E_i)$$

for enhver familie $(E_i)_{i \in I}$ med $E_i \in \mathcal{E}_i$; $i \in I$ og $E_i = \Omega$ på nær endelig mange indices i, så er $\mathcal{B}_i$'erne uafhængige.

(iv). Antag, at $\mathcal{B}_i$; $i \in I$ er uafhængige og lad $I = \bigcup\{I_j \mid j \in J\}$ være en klassedeling af I. Vis, at σ-algebraerne $\mathcal{B}_{I_j}; j \in J$ er uafhængige, hvor $\mathcal{B}_K$ betegner σ-algebraen $\bigoplus_{i \in K} \mathcal{B}_i$ for en vilkårlig delmængde K af I.

(v). Bevis Sætning 6.2.5.

Opgave 20. Vis den associative lov $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$ for σ-endelige mål. *Vejledning:* Vis, at $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$. Først bør man gøre sig klart, at disse mål – efter en oplagt identifikation – er defineret på samme Borelstruktur. Ved selve beviset, kan man eventuelt nøjes med at se på endelige mål, hvilket giver visse lettelser.

Opgave 21. Som bekendt gælder $\lambda_n(A + x_0) = \lambda_n(A)$ for Lebesguemålet λ_n på $\mathbb{R}^n$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Vis, at der mere generelt for enhver målelig funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gælder, at

$$\int f(x - x_0) d\lambda_n(x) = \int f(x) d\lambda_n(x)$$

i den stærkest tænkelige forstand (hvilken?).

Opgave 22 (foldning). Lad μ_1 og μ_2 være Radonmål på $\mathbb{R}^n$ og lad $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ betegne afbildningen $(x, y) \curvearrowright x + y$. Ved *foldningen* $\mu_1 * \mu_2$ af μ_1 og μ_2 forstås billedmålet under φ af produktmålet af μ_1 og μ_2, altså:

$$\mu_1 * \mu_2 = \varphi\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right).$$

(i). Bevis, at der gælder

$$\int f d(\mu_1 * \mu_2) = \iint f(x + y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Præciser de nærmere forudsætninger, der sikrer, at dette gælder.

(ii). Antag nu, at såvel μ_1 som μ_2 har en tæthed m.h.t. Lebesguemålet λ_n på $\mathbb{R}^n$. Sæt $g = d\mu_1/d\lambda_n$ og $h = d\mu_2/d\lambda_n$. Bevis, at så har også $\mu_1 * \mu_2$ en tæthed m.h.t. λ_n og at det drejer sig (n.o.) om funktionen

$$x \curvearrowright \int g(x - y) h(y) d\lambda_n(y).$$

Opgave 23. Lad $(X, \mathcal{B}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{tællemål})$. Bestem $\mathcal{L}_p$- og L_p-rummene i dette tilfælde og forklar, hvorfor der ikke er forskel på $\mathcal{L}_p$ og L_p i dette tilfælde. **Bemærkning:** Rummene, man får frem i dette tilfælde er vigtige især i funktionalanalysen. De betegnes ℓ_p.

Opgave 24. Lad μ være et Radonmål. Vis, at der findes en største åben mængde G_0 med mål 0. Sæt $F_0 = \complement G_0$. Denne mængde kaldes *støtten* for μ og betegnes også $\operatorname{supp}(\mu)$ (support of μ). Vis, at

$$F_0 = \{x \mid \forall N(x) : \mu(N(x)) > 0\}.$$

Her betegner $N(x)$ en åben omegn af x.

Vis, at hvis μ er et endeligt mål, kan $\operatorname{supp}(\mu)$ karakteriseres som den mindste lukkede mængde med fuldt mål, dvs. med mål $= \mu(X)$.

Opgave 25 (*Lusin's sætning*). Lad X og Y være topologiske rum, antag, at Y er separabel og metriserbar (f.eks. kunne $Y = \mathbb{R}$), lad $f : X \to Y$ være målelig og lad μ være et endeligt Radonmål på X.

(i) Vis, at der for hvert $\varepsilon > 0$ findes en kompakt mængde $X_\varepsilon \subseteq X$, så $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$ og således at $f_\varepsilon : X_\varepsilon \to Y$, hvor f_ε betegner restriktionen af f til X_ε, er kontinuert. *Vejledning:* Lad $(G_n)_{n\geq 1}$ være en tællelig basis for topologien i Y. Bestem kompakte mængder $K'_n \subseteq f^{-1}(G_n)$ og $K''_n \subseteq \complement f^{-1}(G_n)$, så $\mu(X \setminus (K'_n \cup K''_n)) < \varepsilon 2^{-n}$. Sæt $X_\varepsilon = \bigcap_1^\infty (K'_n \cup K''_n)$. Udnyt nu, at

$$f_\varepsilon^{-1}(G_n) = f^{-1}(G_n) \cap X_\varepsilon = X_\varepsilon \setminus K''_n.$$

(ii) Check direkte gyldigheden af Lusin's sætning (resultatet vist ovenfor) i tilfældet $X = Y = \mathbb{R}$, $f =$ Dirichlet funktionen $1_{\mathbb{Q}}$ og μ et endeligt mål på $\mathbb{R}$.

Opgave 26. Vis, at der findes et polsk rum X og et Borelmål μ som er endeligt på enhver kompakt mængde, men som ikke er et Radonmål. *Vejledning:* Lad $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ med produkttopologi (faktisk homeomorf med $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Så er X polsk som tælleligt produkt af separable fuldstændigt metriserbare rum. Rummet X er ikke σ-kompakt (dvs. kan ikke overdækkes med numerabelt mange kompakte mængder); for at se det kan man udnytte at er K kompakt og $\nu \geq 1$, vil mængden af n_ν for hvilke der findes $(n_1, \cdots, n_\nu, \cdots)$ i K være begrænset. Se nu på $(0, \infty)$-målet, der er 0 for mængder, der kan overdækkes med numerabelt mange kompakte mængder og ellers ∞.

Opgave 27. Lad μ være et Radonmål og $f : X \to [0, \infty]$ en målelig funktion. Vis, at

$$\int f d\mu = \sup_K \int_K f d\mu,$$

hvor K løber over $\mathcal{K}(X)$. Vis endvidere, at såfremt f er kontinuert og ikke antager værdien $+\infty$, så er det ubestemte integral af f m.h.t. μ igen et Radonmål.

Opgave 28. Lad μ være et Radonmål på X og $\varphi : X \to Y$ en kontinuert afbildning. Sæt $\eta = \varphi(\mu)$. Vis ved et simpelt eksempel (f.eks. med $X = Y = \mathbb{R}$ eller tag Y en singleton), at η ikke behøver være et Radonmål. Vis, at hvis η er endelig på $\mathcal{K}(Y)$, så er η et Radonmål.

Opgave 29. Lad μ være et Radonmål. Vis implikationen

$$f_i \uparrow f \wedge \forall i : f_i \text{ l.s.c. } \wedge \exists g \in C(X) \cap \mathcal{L}(\mu) \forall i : f_i \geq g \Rightarrow \sup_{i\in I} \int f_i d\mu = \int f d\mu.$$

Formulér og vis et tilsvarende resultat for en nedad filtrerende familie af opad-halvkontinuerte funktioner.

Opgave 30. Lad $\mu_1 = \mu_2$ være tællemålet på Borelstrukturen $(X, \mathcal{P}(X))$ med X en "stor" mængde. Bestem Radon-produktmålet $\mu_1 \otimes \mu_2$. På hvilken Borelstruktur er $\mu_1 \otimes \mu_2$ defineret? Vis, at den kan være større end produkt-Borelstrukturen. *Vejledning* til sidste del af opgaven: Udnyt Sætning 2.6.4.

Opgave 31. Lad $\mu = (X, \mathcal{B}(X), \mu)$ og $\eta = (Y, \mathcal{B}(Y), \eta)$ være Radonmål og betegn med $\zeta = (X \times Y, \mathcal{B}(X \times Y), \zeta)$ Radon-produktmålet af μ og η.

(i). Lad $f : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ være l.s.c. Bevis, at funktionerne $x \curvearrowright \int f(x,y)d\eta(y)$ og $y \curvearrowright \int f(x,y)d\mu(x)$ er l.s.c. funktioner og at

$$\int f d\zeta = \iint f(x,y)d\eta(y)d\mu(x) = \iint f(x,y)d\mu(x)d\eta(y).$$

Vejledning. Udnyt approksimation med simple eller elementære funktioner efter recepten i beviset for Sætning 6.3.2. Herved reduceres problemet til at vise, at for en åben mængde G i $X \times Y$ vil $\int \eta(G_x)d\mu(x) \le \zeta(G)$. At dette gælder, kan indses ved at udnytte, at der findes en opad filtrerende familie $G_i \uparrow G$, hvor hver mængde G_i er en endelig foreningsmængde af rektangler med åbne sider.

(ii). Vis, at man ud fra ovenstående kan udlede det velkendte resultat for summer af ikke-negative led:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i,$$

hvor $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ er en klassedeling af I (jvf. Appendix 1.11). Hvorfor er dette resultat ikke en umiddelbar følge af Tonelli's sætning?

Opgave 32. Lad X være metriserbar og $\mu_n; n \ge 1$ og μ Radon sandsynlighedsmål. Man kan spørge om man af $\limsup \mu_n(K) \le \mu(K)$ for alle $K \in \mathcal{K}(X)$ kan slutte, at $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$. Vis, at dette ingenlunde er tilfældet. Man kan endda finde et eksempel på en følge $(\mu_n)_{n \ge 1}$, så $\lim \mu_n(K) = 0$ for alle $K \in \mathcal{K}(X)$. Så vil den angivne betingelse være opfyldt for ethvert μ. *Vejledning.* Et eksempel med X endelig går ikke. Hvad er det simpleste, man så kan tænke sig?

Opgave 33. Hvis, i Sætning 6.5.1, (iii) vi kun forudsætter $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ for uniformt kontinuerte funktioner, kan man stadig slutte $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$. Vis det.

Opgave 34. Vis, at $\varepsilon_{x_n} \overset{\text{sv}}{\to} \varepsilon_x$ hvis og kun hvis $x_n \to x$.

Opgave 35. En mængde $A \subseteq X$ er en μ-*kontinuitetsmængde* såfremt $\mu(\partial A) = 0$, hvor ∂A betegner randen af A, altså $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

(i) Vis, at hvis $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$, så vil $\mu_n(A) \to \mu(A)$ for enhver μ-kontinuitetsmængde.

(ii) I tilfældet $X = \mathbb{R}$ og (μ_n) en følge af sandsynlighedsmål, skal man vise, at såfremt $\mu_n \overset{\text{sv}}{\to} \mu$, vil $F_n(x) \to F(x)$ for ethvert kontinuitetspunkt for F; her betegner F_n fordelingsfunktionen for μ_n; $n \ge 1$ og F fordelingsfunktionen for μ. **Bemærkning:** Der gælder også et omvendt resultat hertil (Udfordring: Vis det!)

Opgave 36 Lad X være metriserbar og $\mu_n; n \ge 1$ og μ Radon mål på X, så $\mu_n \overset{v}{\to} \mu$. Vis, at for alle $K \subseteq G$ (K kompakt, G åben) findes K^* kompakt med $K \subseteq K^* \subseteq G$, så $\liminf \mu_n(K^*) \ge \mu K$. *Vejledning.* Sæt $G_\nu = G \cap \{x | d(x,K) < \frac{1}{\nu}\}$. Bestem $n_1 < n_2 < \cdots$ så $\mu_n(G_\nu) \ge \mu(G_\nu) - \frac{1}{\nu}$ for $n \ge n_\nu$. Bestem $K \subseteq K_\nu \subseteq G_\nu$ så $\mu_n(K_\nu) \ge \mu_n(G_\nu) - \frac{1}{\nu}$ for $n_\nu \le n < n_{\nu+1}$. Sæt $K^* = \bigcup_1^\infty K_\nu$.

Vis dernæst, at hvis $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ og $\mu_n \xrightarrow{v} \eta$, så er $\mu = \eta$.

Bemærkning til topologikyndige: Defineres topologien for vag konvergens i $M_+^{1\cdot}(X,t)$ på den naturlige måde, dvs. som den svageste topologi, så afbildningerne $\mu \curvearrowright \mu(K)$ er opad- og afbildningerne $\mu \curvearrowright \mu(G)$ er nedad-halvkontinuerte, ser vi, at denne topologi er sekventielt Hausdorff (egenskaben vist i opgavens sidste del). Dette er interessant, idet topologien kun er Hausdorff, hvis X er lokalkompakt.

Opgave 37. Lad $(\mathbb{R}^n, d)$ være det n-dimensionelle euklidiske rum.

(i). Vis, at $H^n(A) < \infty$ for enhver begrænset mængde A. *Vejledning.* Se på enhedsterningen i $\mathbb{R}^n$. Split den op i små bidder og udnyt, at H^s_δ er subadditiv.

(ii). Se nu på metrikken $\widetilde{d}$ på $\mathbb{R}^n$ givet ved

$$\widetilde{d}(x,y) = \max_{i \le n} |x_i - y_i|$$

(maksimum-metrikken). Hausdorff mål beregnet for denne metrik betegnes med vedføjet "$\sim$". Vis, at $\widetilde{H}^n(A) = 1$ for enhedsterningen. Konkluder, at $\widetilde{H}^n = \lambda_n$, Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$.