Kapitel 7

Differentiationsteori

7.1 Indledning

I §5.2 definerede vi det ubestemte integral og i tilslutning hertil stillede vi spørgsmålet, om hvilke betingelser der sikrer, at ét mål er det ubestemte integral m.h.t. et andet. Det er det problem, vi nu vender tilbage til.

Er φ og μ de to mål, spørger vi altså, om $\varphi(A) = \int_A f d\mu$ for en eller anden funktion f. Før hæftede vi os kun ved en søgen efter en ikke-negativ funktion f – thi φ og μ var mål, og de er ikke-negative. Vi skal nu se på en mere generel situation, hvor f kan antage såvel positive som negative værdier. Det samme gælder så også φ (selv hvis μ er ikke-negativ som hidtil). Derfor skal vi først udvide begrebet "et mål". Når dette er gjort kan vi løse det stillede problem, først i form af en eksistenssætning, dernæst, efter at have etableret et centralt værktøj fra den geometriske målteori, kan vi give en tilfredsstillende konstruktiv behandling.

7.2 Reelle mål, Jordan og Hahn dekomposition

Definition 7.2.1 Mængdefunktionen $\varphi = (X, \mathcal{B}, \varphi)$ er et *reelt mål,* eller et *mål med fortegn,* såfremt $(X, \mathcal{B})$ er en Borel struktur og $\varphi : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}$ en mængdefunktion, så $\varphi(\emptyset) = 0$ og så rækken $\sum_1^\infty \varphi(A_n)$ er veldefineret i $\bar{\mathbb{R}}$ med sum $\varphi(\bigcup_1^\infty A_n)$ for enhver følge $(A_n)_{n\geq 1}$ af parvis disjunkte målelige mængder.

For at adskille mål fra reelle mål, taler vi ofte om *positive mål* for de mængdefunktioner, vi hidtil har studeret. Hvis μ er et sådant positivt mål og $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ en målelig funktion, så enten f^+ eller f^- er integrabel, så er $A \curvearrowright \int_A f d\mu$ et reelt mål, φ. Med en naturlig udvidelse af terminologien fra §4.2, kaldes dette reelle mål det *ubestemte integral* af f m.h.t. μ og f er *tætheden* eller den *Radon-Nikodym afledede* af φ m.h.t. μ. Eksemplet her er prototypen på et reelt mål.

Det er en naturlig opgave at søge at føre studiet af reelle mål tilbage til studiet af positive mål. I den forbindelse gælder to vigtige sætninger, som vi nu vil gennemgå.

Sætning 7.2.1 (Jordan dekomposition) *Lad $\varphi = (X, \mathcal{B}, \varphi)$ være et reelt mål. Da gælder:*

(i). *Der findes positive mål μ_1 og μ_2 på $\mathcal{B}$, så*

$$\varphi = \mu_1 - \mu_2. \tag{7.1}$$

(ii). *Blandt samtlige μ_1, der kan optræde i* (i) *findes et mindste mål og tilsvarende for μ_2.*

(iii). *De entydigt bestemte mindste mål fra* (i), *betegn dem φ^+ og φ^-, er givet ved*

$$\varphi^+(A) = \sup_{B \subseteq A} \varphi(B)\ , \quad \varphi^-(A) = -\inf_{B \subseteq A} \varphi(B). \tag{7.2}$$

Bevis. Definer $\varphi^+ : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ og $\varphi^- : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ved (7.2). Hvis målene μ_1 og μ_2 passer i (7.1), vil

$$\mu_1(A) \geq \sup_{B \subseteq A} \mu_1(B) \geq \sup_{B \subseteq A} \varphi(B) = \varphi^+(A).$$

Derfor vil $\mu_1 \geq \varphi^+$. Tilsvarende vil $\mu_2 \geq \varphi^-$.

Vi viser nu, at φ^+ og φ^- er positive mål. Det er nok at se på φ^+. Det er klart, at $\varphi^+(\emptyset) = 0$. Lad nu $(A_n)_{n \geq 1}$ være en følge af parvis disjunkte målelige mængder. Noget kort skrevet har vi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \varphi^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

og

$$\varphi^+(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \approx \varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+(A_n).$$

Heraf ses, at $\varphi^+(\bigcup A_n) = \sum \varphi^+(A_n)$, så φ^+ er numerabelt additiv og dermed et mål.

Vi mangler nu blot at vise, at $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Her må vi passe ganske meget på, og sikre os, at vi ikke løber ind i vanskeligheder med $\pm\infty$. Hertil bemærkes først, at såfremt der findes en målelig mængde A med $\varphi(A) = \infty$, så må $\varphi(X) = \infty$ (udnyt, at $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(\complement A)$). Tilsvarende, hvis der findes A med $\varphi(A) = -\infty$, må $\varphi(X) = -\infty$. Vi har set, at hvis $|\varphi(X)| < \infty$, er $|\varphi(A)| < \infty$ for alle $A \in \mathcal{B}$. Ganske tilsvarende ses, at hvis det om den målelige mængde A gælder, at $|\varphi(A)| < \infty$, så må $|\varphi(B)| < \infty$ for enhver målelig delmængde B af A.

Vi har set, at φ højst kan antage én af værdierne $\pm\infty$. Antag f.eks. at $\varphi(A) < \infty$ for alle $A \in \mathcal{B}$. Vi vil vise, at så er $\varphi^+(X) < \infty$. Dette gøres indirekte. Vi antager altså, at $\varphi^+(X) = \infty$. Først viser vi, at der findes $E_1 \in \mathcal{B}$ så $\varphi(E_1) \geq 1$ og $\varphi^+(E_1) < \infty$. For at se det, bestemmes $A_1 \subseteq X$, så $\varphi(A_1) \geq 1$. Er $\varphi^+(A_1) < \infty$, kan $E_1 = A_1$ bruges. Hvis ikke, vælges $A_2 \subseteq A_1$, så $\varphi(A_2) \geq \varphi(A_1) + 1$. Er $\varphi^+(A_2) < \infty$, kan $E_1 = A_2$ bruges. Hvis ikke, vælges $A_3 \subseteq A_2$ med $\varphi(A_3) \geq \varphi(A_2) + 1$. Således fortsættes. Bryder processen af efter endelig mange skridt, har vi fundet vores mængde E_1. Men processen *må* bryde af, thi ellers ville

$$\begin{aligned}
\varphi(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) &= \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n \setminus A_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(A_n) - \varphi(A_{n+1})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1) = -\infty,
\end{aligned}$$

hvilket strider mod at alle målelige delmængder af A_1 har endeligt mål.

Vi fandt E_1 med $\varphi(E_1) \geq 1$ og $\varphi^+(E_1) < \infty$. Så må $\varphi^+(\complement E_1) = \infty$. Med samme ræsonnement som vi anvendte for at finde E_1, kan vi nu finde E_2, så $E_2 \subseteq \complement E_1$, $\varphi(E_2) \geq 1$ og $\varphi^+(E_2) < \infty$. Så må $\varphi^+(X \setminus (E_1 \cup E_2)) = \infty$ og $E_3 \subseteq X \setminus (E_1 \cup E_2)$ findes med $\varphi(E_3) \geq 1$ og $\varphi^+(E_3) < \infty$. Således fortsættes. Vi får konstrueret $(E_n)_{n \geq 1}$ parvis disjunkte målelige mængder, så $\varphi(E_n) \geq 1$ for alle $n \geq 1$. Så må der findes $E \subseteq X$ med $\varphi(E) = \infty$, nemlig $E = \bigcup_1^{\infty} E_n$. Dette er en modstrid. Endelig kan vi konkludere, at antagelsen $\varphi^+(X) = \infty$ må forkastes. Derfor er φ^+ et endeligt mål: $\varphi^+(X) < \infty$.

Først nu er det meningsfuldt at se på mængdefunktionen $\varphi^+ - \varphi^-$. Det er klart, at den bestemmer et reelt mål. Det må være φ! Thi, hvis $\varphi(A) = -\infty$, er $\varphi^-(A) = +\infty$, og for $\varphi(A) > -\infty$ er

$$\begin{aligned}
\varphi^+(A) - \varphi(A) &= \sup_{B \subseteq A} (\varphi(B) - \varphi(A)) = \sup_{B \subseteq A} (-\varphi(A \setminus B)) \\
&= \sup_{B \subseteq A} (-\varphi(B)) = \varphi^-(A).
\end{aligned}$$

Hermed er alle dele af sætningen vist. □

Bemærkning. I (ii) er det nok at antage, at mængdefunktionerne μ_1 og μ_2 på $\mathcal{B}$ er ikke-negative, monotone og opfylder (7.1).

Sætningen giver anledning til at indføre et par begreber:

Definition 7.2.2 Lad φ være et reelt mål. Ved den *positive,* hhv. *negative del* af φ forstås φ^+, hhv. φ^- givet ved (7.2). Ved *variationen* af φ, betegnet $|\varphi|$, forstås mængdefunktionen $A \curvearrowright |\varphi|(A)$ defineret for målelige mængder ved

$$|\varphi|(A) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(A_n)| \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A \right\}. \tag{7.3}$$

Ved den *totale variation* af φ forstås tallet $\|\varphi\| = |\varphi|(X)$.

Bemærkninger. Husk, at $\sum A_n \subseteq A$ i (7.3) betyder, at A_n'erne er parvis disjunkte og indeholdt i A. Bemærk i øvrigt, at vi i (7.3) kunne have nøjes med at se på endelige familier af parvis disjunkte målelige delmængder af A. Det giver samme mængdefunktion. Til de, der har set på §4.6 kan vi bemærke, at $|\varphi|$ er restriktionen til de målelige mængder af det indre mål induceret af mængdefunktionen $A \curvearrowright |\varphi(A)|$, jvf. Sætning 4.6.2.

Sætning 7.2.2 *Den positive del φ^+ og den negative del φ^- af et reelt mål φ er positive mål; mindst ét af disse er et endeligt mål og*

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-. \tag{7.4}$$

Også variationen $|\varphi|$ af φ er et positivt mål, idet

$$|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-. \tag{7.5}$$

Bevis. Første del er en gentagelse af en del af Sætning 1. Kan vi vise formlen (7.5), har vi også vist sidste del af sætningen. Formlen er triviel for en målelig mængde X_0 med $|\varphi(X_0)| = \infty$, thi så følger det af (7.3), at $|\varphi|(X_0) = \infty$ og af (7.4) følger, at $\varphi^+(X_0) + \varphi^-(X_0) = \infty$. Bemærk nu, at hvis $|\varphi(X_0)| < \infty$, vil $|\varphi(A)| < \infty$ for alle $A \subseteq X_0$ (det så vi i beviset for Sætning 1, men det følger mere bekvemt af (7.4)). Hvis vi derfor kan vise (7.5) under den ekstra antagelse, at $|\varphi(X)| < \infty$, følger formlen generelt. Antag derfor, at $|\varphi(X)| < \infty$. Uligheden $|\varphi| \leq \varphi^+ + \varphi^-$ følger af (7.3) og (7.4). For at vise den modsatte ulighed, betragter vi mængdefunktionerne $\mu_1 = \frac{1}{2}(|\varphi| + \varphi)$ og $\mu_2 = \frac{1}{2}(|\varphi| - \varphi)$. Dette er veldefinerede endelige ikke-negative mængdefunktioner på den underliggende Borelstruktur $\mathcal{B}$ og såvel μ_1 som μ_2 er monotone ($A \subseteq B \Rightarrow \mu_1(A) \leq \mu_1(B) \wedge \mu_2(A) \leq \mu_2(B)$). Overvej! Da $\varphi = \mu_1 - \mu_2$, følger det af Sætning 1 (se også bemærkningen efter beviset), at $\mu_1 \geq \varphi^+$, $\mu_2 \geq \varphi^-$. Så vil $\mu_1 + \mu_2 \geq \varphi^+ + \varphi^-$ og vi har vist den manglende ulighed $|\varphi| \geq \varphi^+ + \varphi^-$. □

Bemærkning. Tit ser man (7.5) som definition af $|\varphi|$. Formlen (7.3) har imidlertid den fordel, at den generaliserer til f.eks. komplekse mål.

Et par bemærkninger om terminologi er på sin plads. Et positivt mål kan godt antage værdien $+\infty$. Er dette ikke tilfældet, taler vi som bekendt om et endeligt mål. Tilsvarende kan et reelt mål godt antage en (og kun én) af værdierne $\pm\infty$. Er dette ikke tilfældet, er φ begrænset, idet $|\varphi(A)| < \infty$ for alle målelige mængder A (et sideresultat af Jordan dekompositionen). Vi taler derfor om et *begrænset mål* i denne situation.

Definition 7.2.3 Lad $\varphi = (X, \mathcal{B}, \varphi)$ være et reelt mål. En *positiv mængde* for φ er en målelig mængde A^+ således, at $\varphi(A) \geq 0$ for enhver målelig delmængde af A^+. En *negativ mængde* for φ er en målelig mængde A^- således, at $\varphi(A) \leq 0$ for enhver målelig delmængde af A^-.

Vi ser, at $A^+ \in \mathcal{B}$ er en positiv mængde for φ hvis og kun hvis $\varphi^-(A^+) = 0$. Og $A^- \in \mathcal{B}$ er en negativ mængde for φ, hvis og kun hvis $\varphi^+(A^-) = 0$.

Sætning 7.2.3 (Hahn dekomposition) *Lad $\varphi = (X, \mathcal{B}, \varphi)$ være et reelt mål. Der findes da en dekomposition $X = A^+ \cup A^-$ af X i en positiv og en negativ mængde for φ. Dekompositionen er entydigt bestemt n.o. m.h.t. $|\varphi|$ i den forstand, at hvis $X = B^+ \cup B^-$ er en anden sådan dekomposition, er $|\varphi|(A^+ \Delta B^+) = |\varphi|(A^- \Delta B^-) = 0$.*

Bemærkning. Når vi taler om en dekomposition $X = A^+ \cup A^-$ af X, er det underforstået, at mængderne A^+ og A^- er disjunkte.

Bevis. Enten vil $\varphi^+(X) < \infty$ eller $\varphi^-(X) < \infty$. Antag f.eks. $\varphi^+(X) < \infty$. Bestem A_n så $\varphi(A_n) \leq \varphi^+(X) \leq \varphi(A_n) + 2^{-n}$; $n \geq 1$. Så vil

$$\varphi^+(A_n) \leq \varphi^+(X) \leq \varphi(A_n) + 2^{-n} \leq \varphi^+(A_n) + 2^{-n},$$

hvoraf

$$\varphi^-(A_n) = \varphi^+(A_n) - \varphi(A_n) \leq 2^{-n}$$

og

$$\varphi^+(X \setminus A_n) \leq 2^{-n}$$

Sæt nu

$$A^+ = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m$$

og

$$A^- = \complement(A^+) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} \complement A_m.$$

Vi finder

$$\varphi^+(A^-) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^+ \left(\bigcap_{m\geq n} \complement A_m \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \inf_{m\geq n} \varphi^+(\complement A_m) = 0$$

og

$$\varphi^-(A^+) = \lim_{n\to\infty} \varphi^- \left(\bigcup_{m\geq n} A_m \right) \leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} \varphi^-(A_m) = 0.$$

Dermed har vi fundet en dekomposition som ønsket.

Antag nu, at $X = B^+ \cup B^-$ er en anden dekomposition af X af den betragtede art. Da

$$B^+ \Delta A^+ \subseteq (B^+ \cup A^+) \cap (B^- \cup A^-),$$

vil både $\varphi^+(B^+ \Delta A^+)$ og $\varphi^-(B^+ \Delta A^+)$ være 0, hvorfor $|\varphi|(B^+ \Delta A^+) = 0$. Tilsvarende er $|\varphi|(B^- \Delta A^-) = 0$. $\square$

En dekomposition som angivet i sætningen hedder en *Hahn-dekomposition* hørende til φ.

7.3 Deskriptiv definition af afledet

Definition 7.3.1 Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borel rum, lad μ være et positivt mål på $\mathcal{B}$ og lad φ være et reelt mål på $\mathcal{B}$. En funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ siges at være en *afledet* af φ m.h.t. μ hvis følgende betingelser er opfyldt

$$f \text{ er målelig,} \tag{7.6}$$
$$\forall c \in \mathbb{R} \forall A \in \mathbb{B} : A \subseteq \{f \geq c\} \Rightarrow \varphi(A) \geq c\mu(A), \tag{7.7}$$
$$\forall c \in \mathbb{R} \forall A \in \mathbb{B} : A \subseteq \{f \leq c\} \Rightarrow \varphi(A) \leq c\mu(A). \tag{7.8}$$

Motivationen bag definitionen er, at vi stiler efter at finde f, så $\varphi(A) = \int_A f \, d\mu$ for alle $A \in \mathbb{B}$.

Bemærk, at egenskaberne i (7.7) og (7.8) kun forlanges for c reel. Dog klart, at (7.7) også gælder for $c = +\infty$ og at (7.8) også gælder for $c = -\infty$. Vi finder specielt af (7.7) og (7.8), at $\varphi(f = \infty) \geq \infty \cdot \mu(f = \infty)$ og $\varphi(f = -\infty) \leq -\infty \cdot \mu(f = -\infty)$.

Hvis $\varphi^+(X) < \infty$, er $\mu(f = \infty) = 0$ og hvis $\varphi^-(X) < \infty$, er $\mu(f = -\infty) = 0$. Hvis derfor φ er et begrænset reelt mål, må $|f| < \infty$ n.o. $[\mu]$. Vi skal se, at selv da spiller mængderne, hvor f antager en af værdierne $\pm\infty$ en rolle.

Eksempel 1. Lad $(X, \mathcal{B})$ være enhedsintervallet med den naturlige Borel struktur. Hvis $\varphi = \varepsilon_t$, Dirac målet i et $t \in [0, 1]$, og $\mu =$ Lebesgue målet, så er

$$f(x) = \begin{cases} \infty\,; & x = t \\ 0\,; & x \neq t \end{cases}$$

en afledet af φ m.h.t. μ. Og hvis vi ser på den omvendte situation, hvor $\varphi =$ Lebesgue målet og $\mu = \varepsilon_t$, er

$$f(x) = \begin{cases} 0\,; & x = t \\ \infty\,; & x \neq t \end{cases}$$

en afledet af φ m.h.t. μ. □

Som et vigtigt, men enkelt eksempel af mere generel karakter, peger vi på følgende resultat:

Sætning 7.3.1 *Antag, at $(X, \mathcal{B})$ er atomisk i den forstand, at $X = \bigcup_1^\infty A_n$ med A_n'erne parvis disjunkte og $\mathcal{B} = \sigma(\{A_n \mid n \geq 1\})$. Lad φ være et reelt mål og μ et positivt mål på $\mathcal{B}$. Så er $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ defineret ved*

$$f(x) = \frac{\varphi(A(x))}{\mu(A(x))}\,; \quad x \in X \tag{7.9}$$

en afledet af φ m.h.t. μ. Her betegner $A(x)$ den klasse A_n, som x tilhører.

Før beviset bemærker vi, at der anvendes “naturlig konvention” i (7.9), dvs., hvis $\mu(A(x)) = 0$, sættes $f(x) = +\infty$ hvis $\varphi(A(x)) > 0$, $f(x) = -\infty$ hvis $\varphi(A(x)) < 0$ og $f(x) =$ vilkårlig fast konvention (f.eks. $f(x) = 0$) hvis $\varphi(A(x)) = 0$.

Bevis. Åbenbart er f af formen $f = \sum_1^\infty \alpha_n 1_{A_n}$ med $\alpha_n = \varphi(A_n)/\mu(A_n)$. Det er klart, at f er målelig. For at vise (7.7), lad $c \in \mathbb{R}$ og antag at A er målelig og $A \subseteq \{f \geq c\}$. Mængden A er så af formen $A = \bigcup\{A_n \mid n \in \Delta\}$, hvor $\alpha_n \geq c$ for alle $n \in \Delta$. Idet vi med Δ' betegner mængden af $n \in \Delta$, så $\mu(A_n) > 0$, har vi

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \sum_{n\in\Delta} \varphi(A_n) = \sum_{n\in\Delta'} \varphi(A_n) + \sum_{n\in\Delta\setminus\Delta'} \varphi(A_n) \\
&\geq \sum_{n\in\Delta'} \varphi(A_n) = \sum_{n\in\Delta'} \alpha_n \mu(A_n) \geq c \sum_{n\in\Delta'} \mu(A_n) \\
&= c\mu(\bigcup_{n\in\Delta'} A_n) = c\mu(\bigcup_{n\in\Delta} A_n) = c\mu(A).
\end{aligned}$$

Læg mærke til, at det her er vigtigt, at $c > -\infty$, thi ellers kan vi ikke slutte, at $\varphi(A_n) \geq 0$ for $n \in \Delta \setminus \Delta'$. Ovenstående viser gyldigheden af (7.7); (7.8) vises på lignende måde. $\square$

Sætning 1 peger fremad mod et senere resultat. Hvis $\mathcal{B}$ f.eks. er den naturlige Borelstruktur i et euklidisk rum, kunne man få den idé at approksimere $\mathcal{B}$ med atomiske Borel strukturer, hvor atomerne er geometrisk set “små” mængder. Dette indicerer, at en afledet kan fås som en grænseværdi af formen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(A_n(x))}{\mu(A_n(x))},$$

hvor $A_1(x), A_2(x), \cdots$ i en vis forstand er finere og finere “omegne” af x. Vi skal senere se, om vi kan realisere disse idéer.

Sætning 7.3.2 *Lad f være en afledet af det reelle mål φ m.h.t. det positive mål μ. Så gælder implikationerne:*

$$\varphi^+(X) < \infty \Rightarrow f < \infty \text{ n.o. } [\mu] \tag{7.10}$$
$$\varphi^-(X) < \infty \Rightarrow f > -\infty \text{ n.o. } [\mu] \tag{7.11}$$
$$\|\varphi\| < \infty \Rightarrow |f| < \infty \text{ n.o. } [\mu] \tag{7.12}$$
$$\mu(A) = 0\,,\ |f| < \infty \text{ på } A \Rightarrow |\varphi|(A) = 0. \tag{7.13}$$

Bevis. Egenskaberne (7.10–12) gjorde vi opmærksom på umiddelbart efter definitionen af en afledet.

For at vise (7.13) viser vi først følgende:

$$\mu(A) = 0\,,\ f > -\infty \text{ på } A \Rightarrow \varphi(A) \geq 0, \tag{7.14}$$
$$\mu(A) = 0\,,\ f < +\infty \text{ på } A \Rightarrow \varphi(A) \leq 0 \tag{7.15}$$

For at vise (7.14) antager vi, at $\mu(A) = 0$ og at $f > -\infty$ på A. Så kan A skrives som den disjunkte foreningsmængde

$$A = (A \cap \{0 < f \leq \infty\}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (A \cap \{-n-1 < f \leq -n\}) .$$

Derfor er $\varphi(A) \geq 0$ (overvej!). Dermed er (7.14) vist. Implikationen (7.15) vises på lignende måde. Kombineres (7.14) og (7.15), ses at $\varphi(A) = 0$, hvis $\mu(A) = 0$ og $|f| < \infty$ på A. Betragtes alle delmængder af A, følger (7.13). $\square$

Egenskaberne (7.10–7.13) er forholdsvis specielle for en afledet. Vi skal senere vise mere. Men først må spørgsmålet om eksistens og entydighed afklares.

7.4 Eksistens og entydighed af en afledet

Sætning 7.4.1 (Entydighed af afledet) *Lad φ være et reelt mål og μ et endeligt funderet positivt mål på samme Borel struktur. Hvis både f og g er afledede af φ m.h.t. μ, så er $f = g$ n.o. $[\mu + |\varphi|]$.*

Bevis. Lad os bevise, at $(\mu + |\varphi|)(\{f < g\}) = 0$. Først bemærkes, at for $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$ må

$$(\mu + |\varphi|)(\{f \leq r,\ g \geq s\}) = 0.$$

Dette følger af at det for enhver målelig delmængde A af $\{f \leq r,\, g \geq s\}$ gælder, at

$$\varphi(A) \leq r\mu(A) \leq s\mu(A) \leq \varphi(A). \tag{7.16}$$

Heraf ses nemlig, at såfremt $\mu(A) < \infty$, vil $\mu(A) = 0$. Da μ er endeligt funderet følger så, at $\mu(A) = 0$ for enhver målelig delmængde af $\{f \leq r, g \geq s\}$. Af (7.16) kan så sluttes, at for enhver sådan mængde vil $\mu(A) = \varphi(A) = 0$. Dette viser, at $(\mu + |\varphi|)(\{f \leq r, g \geq s\}) = 0$. Derfor må $(\mu + |\varphi|)(\{f < g\}) = 0$. Tilsvarende må $(\mu + |\varphi|)\ (\{f > g\}) = 0$. Så må $(\mu + |\varphi|)(\{f \neq g\}) = 0$. $\square$

Bemærkning. Det er klart, at hvis f er en afledet, så er enhver målelig funktion g, der stemmer overens med f n.o. $[\mu + |\varphi|]$ også være en afledet. Overvej!

Vi skal nu vise eksistensen af en afledet. For at få en idé til, hvordan det kan vises, bemærkes først, at såfremt f er en afledet af φ m.h.t. μ, vil $X = \{f \geq 0\} \cup \{f < 0\}$ være en Hahn dekomposition for φ. Mere generelt gælder, at for $c \in \mathbb{R}$, er $X = \{f \geq c\} \cup \{f < c\}$ en Hahn dekomposition for $\varphi - c\mu$. Idéen er nu at genvinde f ud fra sådanne dekompositioner.

Sætning 7.4.2 (Eksistens af afledet) *For ethvert reelt mål φ og σ-endeligt positivt mål μ findes en afledet af φ m.h.t. μ.*

Bevis. Et simpelt ræsonnement, som vi overlader til læseren, viser, at vi kan reducere den generelle situation med et σ-endeligt referencemål til tilfældet, hvor referencemålet μ er endeligt. Vi antager derfor, at $\mu(X) < \infty$ og beviser sætningen under denne antagelse.

Da μ nu er et endeligt mål, er $\varphi - r\mu$ et veldefineret reelt mål for ethvert $r \in \mathbb{Q}$. Lad $X = A_r^+ \cup A_r^-$ være en Hahn dekompostion i målelige mængder hørende til $\varphi - r\mu$. Definer $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ved

$$f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x \in A_r^-\}. \tag{7.17}$$

Angående værdierne $\pm\infty$ skal det forstås således, at

$$\{f = -\infty\} = \bigcap_r \bigcup_{s \le r} A_s^- , \quad \{f = +\infty\} = \bigcap_r A_s^+. \tag{7.18}$$

Det er klart, at f er målelig, hvilket også følger af, at for $c \in \mathbb{R}$, er

$$\{f \ge c\} = \bigcap_{r<c} A_r^+.$$

Hvis nu A er en målelig delmængde af $\{f \ge c\}$, må $A \subseteq A_r^+$ for ethvert $r < c$. Heraf følger, at $\varphi(A) \ge r\mu(A)$ for ethvert sådant r. Vi slutter, at $\varphi(A) \ge c\mu(A)$. Hermed har vi eftervist betingelsen (7.7) fra Definition 1.

For at eftervise betingelsen (7.8), antager vi, at A er en målelig delmængde af $\{f \le c\}$. Hold foreløbig $r > c$ fast. Så vil

$$A \subseteq \bigcup_{s \le r} A_s^-$$

Skriv nu A på formen

$$A = \bigcup_{s \le r} H_s,$$

med H_s'erne parvis disjunkte målelige delmængder af de respektive mængder A_s^-. Så er

$$\varphi(A) = \sum_{s \le r} \varphi(H_s) \le \sum_{s \le r} s\mu(H_s) \le \sum_{s \le r} \mu(H_s) = r\mu(A).$$

Da alle tre krav fra Definition 1 er opfyldt, er f en afledet af φ m.h.t. μ. $\square$

7.5 Karakterisation af afledet via integralbetingelser

Sætning 7.5.1 *Lad φ være et reelt mål og μ et positivt mål på $(X, \mathcal{B})$. Antag, at variationen $|\varphi|$ er σ-endelig. Da gælder, at en målelig funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ er en afledet af φ m.h.t. μ, hvis og kun hvis følgende tre betingelser er opfyldt:*

$$\forall A \in \mathcal{B} : \quad \int_A f\,d\mu = \varphi(A \cap \{|f| < \infty\}), \tag{7.19}$$

$$\forall A \in \mathcal{B} : \quad \varphi(A \cap \{f = +\infty\}) \geq 0, \tag{7.20}$$

$$\forall A \in \mathcal{B} : \quad \varphi(A \cap \{f = -\infty\}) \leq 0. \tag{7.21}$$

Bevis. Antag først, at (7.19–7.21) er opfyldt. For $c \in \mathbb{R}$ og $A \subseteq \{f \geq c\}$, A målelig, har vi

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \varphi(A \cap \{|f| < \infty\}) + \varphi(A \cap \{f = +\infty\}) + \varphi(A \cap \{f = -\infty\}) \\
&= \int_A f\,d\mu + \varphi(A \cap \{f = +\infty\}) \\
&\geq \int_A f\,d\mu \geq c\mu(A).
\end{aligned}$$

På samme måde se, at for $A \subseteq \{f \leq c\}$ vil $\varphi(A) \leq c\mu(A)$. Heraf følger, at f er en afledet af φ m.h.t. μ.

Antag dernæst, at f er en afledet af φ m.h.t. μ. Så gælder (7.20–7.21), da $X = \{f \geq 0\} \cup \{f < 0\}$ er en Hahn dekomposition af φ. Vi efterviser (7.19) ved at vise de to implikationer for målelige mængder A:

$$A \subseteq \{0 \leq f \leq \infty\} \quad \Rightarrow \quad \int_A f\,d\mu = \varphi(A \cap \{f < \infty\}), \tag{7.22}$$

$$A \subseteq \{-\infty \leq f < 0\} \quad \Rightarrow \quad \int_A f\,d\mu = \varphi(A \cap \{f > -\infty\}). \tag{7.23}$$

Det er klart, at (7.22) og (7.23) tilsammen medfører (7.19). Da (7.22) og (7.23) vises på lignende måde, kan vi nøjes med at vise (7.22).

Først viser vi, at $\mu(f = \infty) = 0$. Hertil udnyttes, at $|\varphi|$, og dermed også φ^+, er σ-endelig. Lad $\{f = \infty\} = \bigcup_1^\infty A_n$ med $\varphi^+(A_n) < \infty$ for alle n. Så vil

$$\varphi^+(A_n) \geq \varphi(A_n) \geq c\mu(A_n)$$

for alle $c \in \mathbb{R}$, og vi slutter, at $\mu(A_n) = 0$. Så er $\mu(f = \infty) \leq \sum_1^\infty \mu(A_n) = 0$.

Lad nu A være en målelig delmængde af $\{0 \leq f \leq \infty\}$. Lad $c > 1$ være en foreløbig fastholdt konstant. Så er

$$\int_A f\,d\mu = \int_{A \cap \{0 < f < \infty\}} f\,d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{A \cap \{c^n \leq f < c^{n+1}\}} f\,d\mu$$

$$\begin{cases} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^{n+1}\mu(A \cap \{c^n \leq f < c^{n+1}\}) \\ \geq \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^n\mu(A \cap \{c^n \leq f < c^{n+1}\}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} = c\sum_{n=-\infty}^{\infty} c^n\mu(A \cap \{c^n \leq f < c^{n+1}\}) \\ \geq c^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(A \cap \{c^n \leq f < c^{n+1}\}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} = c\varphi(A \cap \{0 < f < \infty\}) \\ = c^{-1}\varphi(A \cap \{0 < f < \infty\}). \end{cases}$$

Dette gælder alle $c > 1$, og vi slutter, at

$$\int_A f d\mu = \varphi(A \cap \{0 < f < \infty\}).$$

Da $\varphi(E) = 0$ for alle målelige delmængder af $\{f = 0\}$, er

$$\varphi(A \cap \{0 < f < \infty\}) = \varphi(A \cap \{0 \leq f < \infty\}) = \varphi(A \cap \{f < \infty\}),$$

og vi ser nu, at (7.22) gælder. $\square$

7.6 Absolut kontinuitet, singularitet

Definition 7.6.1 Lad φ være et reelt og μ et positivt mål. Vi siger, at φ er *absolut kontinuert m.h.t.* μ, og skriver $\varphi \ll \mu$, såfremt implikationen $\mu(A) = 0 \Rightarrow \varphi(A) = 0$ gælder for enhver målelig mængde A. Vi siger, at φ er *singulær m.h.t.* μ, og skriver $\varphi \perp \mu$, såfremt der findes en μ-nulmængde N, så $|\varphi|(\complement N) = 0$.

Hvis $\varphi \ll \mu$, vil også $|\varphi| \ll \mu$. Hvis $\varphi \perp \mu$, og dermed $|\varphi| \perp \mu$, er også $\mu \perp |\varphi|$. På grund af denne symmetri, siger vi også, at φ og μ er *singulære.* Hvis $\varphi \ll \mu$ og $\varphi \perp \mu$, er $\varphi \equiv 0$.

Sætning 7.6.1 (Lebesgue's dekompositionssætning) *Lad φ være et begrænset reelt og μ et positivt mål på Borelrummet $(X, \mathcal{B})$. Antag, at såvel $|\varphi|$ som μ er σ-endelige mål.*

Der findes da entydigt bestemte reelle mål φ_c og φ_s således, at

$$\varphi = \varphi_c + \varphi_s, \ \varphi_c \ll \mu, \ \varphi_s \perp \mu.$$

Er f en afledet af φ m.h.t. μ, er φ_c og φ_s bestemt af følgende formler, gyldige for en vilkårlig målelig mængde A:

$$\varphi_c(A) = \int_A f d\mu, \tag{7.24}$$

$$\varphi_s(A) = \varphi(A \cap \{|f| = \infty\}). \tag{7.25}$$

Bevis. Definer φ_c og φ_s ud fra en afledet f ved hjælp af formlerne (7.24) og (7.25). Af Sætning 7.5.1 følger, at φ_c og φ_s er reelle mål med $\varphi = \varphi_c + \varphi_s$. Af (7.24) ses, at $\varphi_c \ll \mu$. At $\varphi_s \perp \mu$, ses af at $N = \{|f| = \infty\}$ er en μ-nulmængde ifølge Sætning 7.3.2 og af at $\varphi_s(B) = 0$ for enhver målelig delmængde af $\complement N$, som det fremgår af (7.25).

Lad $\varphi = \varphi_c^* + \varphi_s^*$ være en (anden) dekomposition af φ med de fremhævede egenskaber. Da er $\psi = \varphi_c - \varphi_c^* = \varphi_s^* - \varphi_s$ både absolut kontinuert og singulært (m.h.t. μ), hvorfor $\psi \equiv 0$. Derfor er $\varphi_c^* = \varphi_c$ og $\varphi_s^* = \varphi_s$. Dekompositionen af φ er altså entydig. $\square$

Definition 7.6.2 Målene φ_c og φ_s i sætningen kaldes henholdsvis den *absolut kontinuerte del* af φ og den *singulære del* af φ .h.t. μ. Dekompositionen $\varphi = \varphi_c + \varphi_s$ hedder *Lebesgue dekompositionen* af φ (m.h.t. μ).

Som et vigtigt korollar til Lebesgue's dekompositionssætning finder vi:

Sætning 7.6.2 (Radon-Nikodym's sætning) *Lad φ være et begrænset reelt mål og μ et σ-endeligt mål. Så findes en μ-integrabel funktion f, så $\varphi(A) = \int_A f d\mu$ for alle målelige mængder A, hvis og kun hvis φ er absolut kontinuert m.h.t. μ. Funktionen f, den* Radon-Nikodym afledede *af φ m.h.t. μ, er entydigt bestemt på nær en μ-nulmængde.*

Overvej!

Som en vigtig anvendelse i sandsynlighedsregningen ses, at fordelingen P af en stokastisk vektor med værdier i $\mathbb{R}^n$ har en tæthedsfunktion, hvis og kun hvis $P \ll \lambda_n$, det n-dimensionale Lebesgue mål. For $n = 1$ kan man vise, at $P \ll \lambda\ (= \lambda_1)$, hvis og kun hvis der for hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ således, at der for alle endelige familier $(]a_i, b_i])_{i \leq k}$ af parvis disjunkte halv-lukkede intervaller gælder implikationen:

$$\sum_{i \leq k} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i \leq k} (F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon, \tag{7.26}$$

hvor F betegner den til fordelingen hørende fordelingsfunktion. Se Opgave 3. Det er klart, at betingelsen (7.26) er stærkere, end blot en betingelse om at F skal være kontinuert. Det er derfor man har valgt terminologien med "absolut kontinuitet".

Opgaver til Kapitel VII

Opgave 1. Giv en fornuftig definition af et *komplekst mål* og vis en dekompositionssætning, hvor studiet af disse mål føres tilbage til et studie af allerede kendte objekter.

Opgave 2. Antag, at f er en afledet af φ m.h.t. μ, og at $f(x_0) = \infty$. Vis, at så er f også en afledet af $\varphi + \infty\varepsilon_{x_0}$ m.h.t. μ.

Angiv dernæst et eksempel, der viser, at (7.19) i Sætning 7.5.1 ikke behøver gælde, hvis $|\varphi|$ ikke er σ-endelig.

Opgave 3. Lad φ være et begrænset reelt mål og μ et σ-endeligt mål på $(X, \mathcal{B})$. Antag, at $\mathcal{A}$ er en algebra, der frembringer $\mathcal{B}$: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Vis, at φ er absolut kontinuert mh.t. μ, hvis og kun hvis der for hvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ således, at $|\varphi(A)| < \varepsilon$ for alle $A \in \mathcal{A}$ med $\mu(A) < \delta$.

Udnyt dette resultat til at eftervise kriteriet (7.26) for absolut kontinuitet i tilfældet $X = \mathbb{R}$ og φ (f.eks.) et sandsynlighedsmål.

Opgave 4. Vis, med forudsætninger som i Sætning 7.6.1, at der gælder formlerne

$$\begin{aligned} (\varphi_s)^+(A) &= \varphi(A \cap \{f = +\infty\}), \\ (\varphi_s)^-(A) &= \varphi(A \cap \{f = -\infty\}). \end{aligned}$$

Opgave 5. Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum og lad $(M(X), d)$ betegne vektorrummet af alle begrænsede reelle mål med metrik givet ved $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$. Vis, at for $\varphi \in M(X)$ er

$$\sup_{A \in \mathcal{B}} |\varphi(A)| \le \|\varphi\| \le 2 \sup_{A \in \mathcal{B}} |\varphi(A)|$$

og slut, at konvergens, $\varphi_n \to \varphi$ i $(M(X), d)$ – man taler om *konvergens i total variation* – kommer ud på uniform konvergens $\varphi_n(A) \to \varphi(A)$ over $A \in \mathcal{B}$.

Vis, at $(M(X), d)$ er et fuldstændigt metrisk rum. **Bemærkning:** Med terminologi fra funktionalanalysen er $(M(X), d) = (M(X), \|\cdot\|)$ et *Banach rum.*

Opgave 6. Vis, at Radon-Nikodym's sætning gælder når $|\varphi|$ og μ er σ-endelige mål. Vis, at sætningen ikke gælder uden nogen form for endelighedsbetingelser på φ og μ. *Vejledning.* Se på Borelstrukturen af tællelige/co-tællelige mængder. Lad φ være $(0, \infty)$-målet og μ tællemålet på denne Borelstruktur.

Opgave 7. Vis, at man formelt set kan svække kravene (7.7–8) til en afledet ved kun at kræve, at implikationerne $A \subseteq \{f > c\} \Rightarrow \varphi(A) \ge c\mu(A)$ og $A \subseteq \{f < c\} \Rightarrow \varphi(A) \le c\mu(A)$ er opfyldt.