

Appendix I: Forudsætninger, Notation

1.1 Logiske tegn

Fra logikken bruges følgende tegn (*konnektiver* og *kvantorer*): $\neg$ (*negation*, “non”), $\vee$ (*disjunktion*, “eller”), $\wedge$ (*konjunktion*, “og”), $\Rightarrow$ (*implikation*, “hvis-så”), $\Leftrightarrow$ (*bi-implikation*, “hvis og kun hvis”), $\forall$ (*alkvantor*, “for alle”) og $\exists$ (*eksistenskvantor*, “der findes”, “der eksisterer”).

Vi minder om at $P \vee Q$ er sand, hvis og kun hvis mindst ét af udsagnene P og Q er sande samt at $P \Rightarrow Q$ er sand, hvis og kun hvis $\neg P \vee Q$ er det. Her står $\neg P \vee Q$ for $(\neg P) \vee Q$, idet $\neg$ binder stærkere end $\vee$ (og $\wedge$). Konnektiverne $\neg$, $\vee$ og $\wedge$ binder stærkere end $\Rightarrow$ og $\Leftrightarrow$.

Notationsmæssigt benyttes ofte komma i stedet for $\wedge$. F.eks. kan vi i visse sammenhænge skrive “ P, Q og R ” i stedet for $P \wedge Q \wedge R$. Vedrørende brug af kvantorer indsættes ofte et kolon til tydeliggørelse, f.eks. $\forall x : P(x)$ og $\forall x \exists y : P(x, y)$. En anden notationsmulighed er at bruge parenteser, f.eks. $(\forall x)Ax$. Vi bruger ofte notation à la “ $\forall x$ så $P(x) : Q(x)$ ” for “ $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$ ”.

1.2 Konkrete mængder

$\emptyset$: Den tomme mængde. Har ingen elementer ($\forall x : x \notin \emptyset$)

$\mathbb{N}$: Mængden af naturlige tal: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$: Naturlige tal og 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$: Hele tal: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

$\mathbb{Q}$: Rationale tal: $\mathbb{Q} = \{p/q | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R}$: Reelle tal: $\mathbb{R} = \{x | x \text{ reel}\}$

$\bar{\mathbb{R}}$: Udvidede reelle tal: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\mathbb{R}_+$: Positive reelle tal: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

$\bar{\mathbb{R}}_+$: Udvidelse af $\mathbb{R}_+$: $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$

$\mathbb{R}^n$: n -dimensionale reelle talrum: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$: Komplekse tal: $\mathbb{C} = \{a + ib | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}^n$: n -dimensionale komplekse talrum: $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) | z_1 \in \mathbb{C}, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$

$[a, b]$: Lukkede interval $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

$[a, b[$: Halvåbne interval $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

$]a, b]$: Halvåbne interval $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

$]a, b[$: Åbne interval $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.

Med mindre andet påpeges, er intervaller forudsat begrænsede.

Vedrørende regning med de udvidede reelle tal bruges "naturlige" vedtægter samt vedtægterne $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, $0 \cdot$ "ikke defineret" = 0 og $\infty + (-\infty) =$ "ikke defineret".

For $a \in \mathbb{R}$, er $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = -\min(a, 0)$, $|a| = a^+ + a^-$. Vi har $a = a^+ - a^-$.

Mængder noteres på *listeform*, f.eks. $x = \{a, b, c\}$, eller ved brug af åbne udsagn: $X = \{x | P(x)\}$, f.eks. for det åbne udsagn $P(x)$: $x \notin x$ finder vi $X = \emptyset$. To mængder er *identiske* såfremt de indeholder de samme elementer. Med brug af sædvanlig notation for inklusion har vi derfor ækvivalensen

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

En *singleton* er en mængde med kun ét element.

1.3 Mængdeoperationer

Foreningsmængde, fællesmængde, produktmængde, potensmængde, differensmængde, symmetrisk differens, komplementærmængde og kvotientmængde defineres ved

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I : x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | \forall i \in I : x \in A_i\},$$

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} | \forall i \in I : x_i \in A_i\},$$

$$\mathcal{P}(X) = \{A | A \subseteq X\},$$

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\},$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\complement A = X \setminus A \text{ (når det er underforstået, at } A \subseteq X),$$

$$X/R = \{\text{ækvivalensklasser}\} \text{ (når } R \text{ er given ækvivalensrelation på } X).$$

Er $(A_n)_{n \geq 1}$ en følge af mængder, skriver vi $A_n \uparrow A$ såfremt $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ og $A = \bigcup_1^\infty A_n$, og vi skriver $A_n \downarrow A$ såfremt $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ og $A = \bigcap_1^\infty A_n$.

Er $(A_i)_{i \in I}$ en indexeret familie af mængder, siger vi, at familien er *opad filtrerende*, hhv. *nedad filtrerende*, såfremt der for alle endelige delmængder I_0 af indeksmængden I findes et indeks $i_0 \in I$ således, at $\bigcup_{i \in I_0} A_i \subseteq A_{i_0}$, hhv. $\bigcap_{i \in I_0} A_i \supseteq A_{i_0}$. Disse begreber indføres også for ikke-indicerede familier, se §5.

Vi skriver $A_i \uparrow A$ såfremt $(A_i)_{i \in I}$ er opad filtrerende og $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Vi skriver $A_i \downarrow A$ såfremt $(A_i)_{i \in I}$ er nedad filtrerende og $A = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Hvis mængderne i familien $(A_i)_{i \in I}$ er parvis disjunkte, skrives af og til $\sum_{i \in I} A_i$ i stedet for $\bigcup_{i \in I} A_i$ for at udtrykke dette forhold (varianter af notationen som $A + B$ og $A_1 + A_2 + \dots$ kan også forekomme).

Hvis $A \supseteq B$, kaldes $A \setminus B$ en *ægte differens* og undertiden skrives $A - B$ i stedet for $A \setminus B$.

Der gælder en række oplagte mængdeteoretiske relationer ($A \cup B = B \cup A, \dots$). Der er grund til eksplicit at hæfte sig ved *de Morgans regler*:

$$\mathfrak{C} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{C} A_i, \quad \mathfrak{C} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{C} A_i \quad (1.1)$$

og de *distributive regler* (i generel form): Lad I være en mængde (en indeksmængde), lad $(J_i)_{i \in I}$ være en familie af mængder (indeksmængder) og lad $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ være et skema af mængder. Så er

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} E_{i,j} = \bigcup_{(j_i)_{i \in I}} \bigcap_{i \in I} E_{i,j_i}, \quad (1.2)$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} E_{i,j} = \bigcap_{(j_i)_{i \in I}} \bigcup_{i \in I} E_{i,j_i}, \quad (1.3)$$

hvor forenings- og fællesmængde over (j_i) er over alle $(j_i)_{i \in I}$ så $j_i \in J_i$ for alle $i \in I$, dvs. over alle $(j_i) \in \prod_{i \in I} J_i$. Specielt, for $I = \mathbb{N}$, $J_i = \mathbb{N}$ for alle i , er

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{n,m} = \bigcup_{(m_n)_{n \in \mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,m_n}, \quad (1.4)$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} E_{n,m} = \bigcap_{(m_n)_{n \in \mathbb{N}}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{n,m_n}. \quad (1.5)$$

Er A en delmængde af en "grundmængde" X , og er $X_0 \subseteq X$, defineres *sporet af A i X_0* ved

$$\text{tr}_{X_0}(A) = A \cap X_0$$

("tr" = "trace", spor).

1.4 Afbildninger

Skrives $f : X \rightarrow Y$ betyder det, at f er en *afbildning af X ind i Y* , dvs., vi forudsætter, at *definitionsområdet* er hele X : $\text{Dm}(f) = X$. *Værdimængden* er

$Vm(f) = \{y | \exists x : y = f(x)\}$. Grafen for f (der kan identificeres med selve afbildningen) er mængden

$$\text{graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}.$$

Afbildningen er *injektiv* hvis vi af $f(x_1) = f(x_2)$ kan slutte $x_1 = x_2$, *surjektiv* hvis $\forall y \in Y \exists x : y = f(x)$ og *bijektiv* hvis den både er injektiv og surjektiv. *Billede* af $A \subseteq X$ og *urbillede* af $B \subseteq Y$ er givet ved $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ og $f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$. Vi sætter $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$, *y-fiberen* af f . Der gælder:

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i), \quad (1.6)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i) \text{ ("=" hvis } f \text{ er injektiv)}, \quad (1.7)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i), \quad (1.8)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad (1.9)$$

$$f^{-1}(\mathbb{C}B) = \mathbb{C}f^{-1}(B). \quad (1.10)$$

En injektiv afbildning af X ind i Y kaldes også en *indlejring* af X i Y og vi skriver $f : X \hookrightarrow Y$ for at udtrykke dette.

For afbildninger bruges også $\hookrightarrow$ som notation. F.eks. kan vi sige, at afbildningen $x \mapsto \{x\}$ er en indlejring af X ind i $\mathcal{P}(X)$ og vi kan definere den *identiske afbildning* på X , id_X ved forskriften $x \mapsto x$; $x \in X$. Er $X_0 \subseteq X$, defineres den *naturlige indlejring* af X_0 i X som indlejringen $X_0 \hookrightarrow X$ givet ved $x \mapsto x$; $x \in X_0$.

Med A^B betegnes mængden af afbildninger af B ind i A . Idet $n \in \mathbb{N}$ ofte identificeres med en standard n -mængde, gerne $\{0, 1, \dots, n-1\}$ (eller $\{1, 2, \dots, n\}$), er X^n mængden af afbildninger $f : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow X$, hvilket kan identificeres med mængden af n -tupler $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ af elementer fra X . Der er altså overensstemmelse med den generelle eksponentnotation A^B og velkendt notation som X^n . Idet $2 = \{0, 1\}$ (faktisk er dette definitionen af 2 i den strømlinede mængdelære, men vi kan også tænke på det blot som en identifikation), er 2^X mængden af *indikatorfunktioner* på X , funktioner der kun kan antage værdierne 0 og 1. Indikatorfunktionen hørende til $A \subseteq X$ betegnes 1_A og er givet ved $(1_A)(x) = 1$ for $x \in A$, $(1_A)(x) = 0$ for $x \in \mathbb{C}A$. Med $A \mapsto 1_A$ har vi en naturlig bijektion mellem $\mathcal{P}(X)$ og 2^X , hvorfor vi kan identificere disse to mængder.

Sammensætningen af $f : Y \rightarrow Z$ og $g : X \rightarrow Y$ er $f \circ g : X \rightarrow Z$ givet ved $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; $x \in X$. Der gælder

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)); \quad A \subseteq X, \quad (1.11)$$

$$(f \circ g)^{-1}(C) = g^{-1}(f^{-1}(C)); \quad C \subseteq Z. \quad (1.12)$$

Er $Z = X$ og $f \circ g = \text{id}_X$, er g en *højre invers* til f og f en *venstre invers* til g . Af $f \circ g = \text{id}_X$ sluttet, at f er surjektiv og at g er en indlejring af X i Y . Er $g : X \hookrightarrow Y$ givet, findes en venstre invers til g , og er $f : Y \rightarrow X$ givet og surjektiv, findes en højre invers til f . Det sidste kræver udvalgsaksiomet. Er $g : \rightarrow Y$ en bijektion, skrives g^{-1} for den entydigt bestemte inverse til f (det er underordnet, om vi her tænker på højre- eller venstre invers).

For $f : X \rightarrow Y$ og $X_0 \subseteq X$ betegner $f|_{X_0}$ *restriktionen* af f til X_0 givet ved $(f|_{X_0})(x) = f(x)$; $x \in X_0$ eller, ækvivalent, $f|_{X_0} = f \circ \text{id}_{X_0}$.

Lad X være en produktmængde: $X = \prod_{i \in I} X_i$. X kan så identificeres som mængden af afbildninger $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ så $f(i) \in X_i$ for alle $i \in I$. Tænker vi på denne måde, kan *projektionsafbildningerne* defineres ved at se på restriktionerne til delmængder af I . Præcist: Lad $I_0 \subseteq I$ og sæt $X_0 = \prod_{i \in I_0} X_i$. Så er *projektionerne af X på X_0* defineret som afbildningen $f \mapsto f|_{I_0}$; $f \in X$, altså $(x_i)_{i \in I} \mapsto (x_i)_{i \in I_0}$.

Lad $f : X \rightarrow Y$ og lad $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ og $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ være de to projektionsafbildninger hørende til $X \times Y$. Så er

$$f(A) = \pi_Y(\text{graf}(f) \cap (A \times Y)); \quad A \subseteq X, \quad (1.13)$$

$$f^{-1}(B) = \pi_X(\text{graf}(f) \cap (X \times B)); \quad B \subseteq Y. \quad (1.14)$$

Lad $f_i : X_i \rightarrow Y_i$; $i \in I$ være en familie af afbildninger. Ved *produktafbildningen* $F = \prod_{i \in I} f_i$ forstås afbildningen $F : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ givet ved $F((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I}$. Antag nu, at $X_i = X$ for alle $i \in I$. Så defineres *diagonalafbildningen* hørende til familien $(f_i)_{i \in I}$ som afbildningen

$$\Delta f_i : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i,$$

givet ved $x \mapsto (f_i(x))_{i \in I}$. Vi har

$$\Delta f_i = \prod_{i \in I} f_i \circ \theta,$$

hvor θ betegner *diagonalindlejringen* af X i $\prod_{i \in I} X_i = X^I$ givet ved $x \mapsto (x_i)_{i \in I}$ med $x_i = x$ for alle $i \in I$. I øvrigt er $\text{Vm}(\theta)$ *diagonalen* i X^I .

For kvotientmængder X/R (R en ækvivalensrelation i X) og afbildninger skal vi kun indføre ét begreb nemlig den *naturlige projektion* af X på X/R som er afbildningen $\theta : X \rightarrow X/R$ karakteriseret ved $x \in \theta(x)$ for alle $x \in X$.

For afbildninger ind i $\mathbb{R}$ (eller andre mængder med ordningsstruktur, f.eks. $\overline{\mathbb{R}}$) er det undertiden bekvemt at bruge en notation med opad- og nedad pile. F.eks. indikerer notationen $f_n \uparrow f$ typisk, at $(f_n)_{n \geq 1}$ er en følge af reelle funktioner på X , så $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ og så $\lim f_n(x) = f(x)$ for alle $x \in X$. Som sædvanlig betyder $f \leq g$, at $f(x) \leq g(x)$ for alle $x \in X$.

Mere generelt kan vi se på opad- og nedad filtrerende familier af funktioner. Lad I være en indeksmængde og $(f_i)_{i \in I}$ en familie af reelle funktioner defineret på X . Vi siger, at familien er *opad filtrerende*, hhv. *nedad filtrerende*, såfremt der for enhver

endelig delmængde I_0 af I findes et indeks $i_0 \in I$ så $f_i \leq f_{i_0}$, hhv. $f_i \geq f_{i_0}$, for alle $i \in I_0$. Vi skriver $f_i \uparrow f$ for at udtrykke, at $(f_i)_{i \in I}$ er opad filtrerende og at $f(x) = \sup\{f_i(x) \mid i \in I\}$ for alle $x \in X$. Tilsvarende indføres notationen $f_i \downarrow f$. Hvis $f_i \uparrow f$, hhv. $f_i \downarrow f$, siger vi, at f_i *filtrerer opad mod f* , hhv. at f_i *filtrerer nedad mod f* . Notationen er i overensstemmelse med tidligere notation idet der gælder biimplikationerne $1_{A_i} \uparrow 1_A \Leftrightarrow A_i \uparrow A$ og $1_{A_i} \downarrow 1_A \Leftrightarrow A_i \downarrow A$.

1.5 Brolægninger

Lad X være en mængde. En *brolægning* på X er en ikke-tom delmængde af $\mathcal{P}(X)$. Eksempelvis er $\{\emptyset\}$ og $\mathcal{P}(X)$ brolægninger på X . Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X , kaldes $(X, \mathcal{E})$ et *brolagt rum*. Undertiden omtales mængderne i $\mathcal{E}$ som *stenene* i brolægningen. For forenings- og fællesmængde bruges enten kort notation: $\bigcup \mathcal{E}$ og $\bigcap \mathcal{E}$ eller mere udførlig notation: $\bigcup\{E \mid E \in \mathcal{E}\}$ og $\bigcap\{E \mid E \in \mathcal{E}\}$. Brolægningen $\mathcal{E}$ er en *overdækning* af $A \subseteq X$ såfremt $A \subseteq \bigcup \mathcal{E}$. Og $\mathcal{E}$ er en *klassedeling* af X såfremt $\mathcal{E}$ er en overdækning af X med ikke-tomme parvis disjunkte mængder ($X \subseteq \bigcup \mathcal{E}$, $E \in \mathcal{E} \Rightarrow E \neq \emptyset$, $E \in \mathcal{E} \wedge F \in \mathcal{E} \wedge E \neq F \Rightarrow E \cap F = \emptyset$). Som bekendt er der en naturlig forbindelse mellem ækvivalensrelationer og klassedelinger.

Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X og X_0 en delmængde af X , defineres *sporbrolægningen* som *brolægningen* med sten $X_0 \cap E$; $E \in \mathcal{E}$:

$$\text{tr}_{X_0}(\mathcal{E}) = \{X_0 \cap E \mid E \in \mathcal{E}\} = \{\text{tr}_{X_0} E \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X defineres *co-brolægningen* som

$$\text{co } \mathcal{E} = \{\complement E \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Er $\mathcal{E}$ og $\mathcal{F}$ brolægninger på X , er $\mathcal{E}$ en delbrolægning af $\mathcal{F}$, hvis $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. Vi siger også, at $\mathcal{E}$ er *grovere* end $\mathcal{F}$ eller at $\mathcal{F}$ er *finere* end $\mathcal{E}$, hvis dette gælder.

Er $(X_1, \mathcal{E}_1), \dots, (X_n, \mathcal{E}_n)$ brolagte rum, betegner vi med $(X, \mathcal{E})$ *produktet* af disse rum, givet ved at X er produktmængden $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ og $\mathcal{E}$ er *produktbrolægningen*

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{E}_i = \{E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \mid E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n\}. \quad (1.15)$$

Er $(X_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ en familie af brolagte rum og er indeksmængden I uendelig, defineres *produktet* af disse rum som $(X, \mathcal{E})$, hvor X er produktmængden $\prod_{i \in I} X_i$ og $\mathcal{E}$ er *produktbrolægningen*

$$\mathcal{E} = \prod_{i \in I} \mathcal{E}_i = \left\{ \prod_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I : A_i \in \mathcal{E}_i \vee A_i = X_i) \wedge (\{i \in I \mid A_i \neq X_i\} \text{ er endelig}) \right\}. \quad (1.16)$$

Til at udtrykke forskellig struktur for en brolægning benyttes en kombination af følgende tegn:

$$\mathbb{C}, \setminus, -, \Delta, \cup f, \cup c, \cup a, \cap f, \cap c, \cap a, \Sigma f, \Sigma c, \Sigma a, \cup c, \cup a, \cap c, \cap a. \quad (1.17)$$

Til forklaring: “ $\mathbb{C}$ ” = komplement; “ $\setminus$ ” = differens; “ $-$ ” = ægte differens; “ Δ ” = symmetrisk differens; “ $\cup f$ ” = endelig foreningsmængdedannelse (“ f ” = “finite”. endelig); “ $\cup c$ ” = tællelig foreningsmængdedannelse (“ c ” = “countable”, tællelig); “ $\cup a$ ” = vilkårlig foreningsmængdedannelse (“ a ” = “arbitrary”, vilkårlig); “ $\cap f$ ” hhv. “ $\cap c$ ” og “ $\cap a$ ” = tilsvarende begreber, men for fællesmængdedannelse; “ Σf ” hhv. “ Σc ” og “ Σa ” = disjunkt foreningsmængdedannelse for endelig hhv. tællelig og vilkårlig mange mængder; “ $\cup c$ ” = stigende foreningsmængdedannelse for følger; “ $\cup a$ ” = stigende foreningsmængdedannelse, men for vilkårlige opad filtrerende systemer; “ $\cap c$ ” = dalende fællesmængdedannelse for følger; “ $\cap a$ ” = dalende fællesmængdedannelse, men for vilkårlige nedad filtrerende systemer.

Til yderligere forklaring tjener følgende eksempler: En $(\mathbb{C}, \cup f)$ -brolægning eller en $(\mathbb{C}, \cup f)$ -lukket brolægning eller en brolægning lukket under $(\mathbb{C}, \cup f)$ er en brolægning $\mathcal{E}$, der er lukket under komplementærmængdedannelse ($A \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{C}A \in \mathcal{E}$) og endelig foreningsmængdedannelse ($n \in \mathbb{N}, A_1 \in \mathcal{E}, \dots, A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{E}$). En $(\cap f, \cup a)$ -lukket brolægning er en brolægning $\mathcal{E}$, der er lukket under endelig fællesmængdedannelse ($\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{E}_0$ endelig $\Rightarrow \bigcap \mathcal{E}_0 \in \mathcal{E}$) og vilkårlig foreningsmængdedannelse ($\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup \mathcal{E}_0 \in \mathcal{E}$). En $(\Sigma c, \cap c)$ -lukket brolægning er en brolægning, der er lukket under tællelig disjunkt foreningsmængdedannelse ($A_n \in \mathcal{E}$ for $n \geq 1$, $(A_n)_{n \geq 1}$ parvis disjunkte $\Rightarrow \Sigma_1^\infty A_n = \bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{E}$) og dalende fællesmængdedannelse for følger ($A_n \in \mathcal{E}$ for $n \geq 1$, $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{E}$). En $(\cup a, \cap a)$ -lukket brolægning er en brolægning der er lukket under stigende foreningsmængdedannelse og dalende fællesmængdedannelse ($A_i \in \mathcal{E}$ for alle $i \in I$, $A_i \uparrow A$ eller $A_i \downarrow A \Rightarrow A \in \mathcal{E}$).

I tilslutning til det sidste eksempel indføres følgende notation for brolægninger: $\mathcal{E} \uparrow A$ betyder, at $A = \bigcup \mathcal{E}$ og at $\mathcal{E}$ er *opad filtrerende*, dvs., for $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ og $\mathcal{E}_0$ endelig, findes $E_0 \in \mathcal{E}$, så $\bigcup \mathcal{E}_0 \subseteq E_0$. Tilsvarende betyder $\mathcal{E} \downarrow A$ at $A = \bigcap \mathcal{E}$ og at $\mathcal{E}$ er *nedad filtrerende*, dvs. $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ endelig $\Rightarrow \exists E_0 \in \mathcal{E} : E_0 \subseteq \bigcap \mathcal{E}_0$.

Vi kan også inddrage faste mængder, typisk $\emptyset$ eller grundmængden X , i vores notationssystem. Hvis f.eks. $\mathcal{E}$ er en brolægning, der er $(\cup f, \cap f)$ -lukket og indeholder $\emptyset$ og X , kan vi give udtryk for dette ved at sige, at $\mathcal{E}$ er $(\emptyset, X, \cup f, \cap f)$ -lukket.

Er X en mængde, kan man tale om *typer* af brolægninger på X . F.eks. er typen af $(\mathbb{C}, \cup f)$ -brolægninger på X mængden af $(\mathbb{C}, \cup f)$ -lukkede brolægninger på X . Bemærk, at $\mathcal{P}(X)$ tilhører enhver type af brolægninger på X og at fællesmængden af en vilkårlig familie af brolægninger tilhørende samme type igen tilhører denne type. Derfor giver det for en vilkårlig type τ (τ kunne f.eks. være givet ved listen $(\mathbb{C}, \cup f)$ eller en vilkårlig anden liste fra vores udvalg (17) af symboler) og en vilkårlig brolægning $\mathcal{E}$ på X mening at tale om den groveste brolægning af type τ , der er finere end $\mathcal{E}$. Denne kalder vi τ -brolægningen frembragt af $\mathcal{E}$ eller τ -afslutningen af $\mathcal{E}$ og vi bruger herfor betegnelsen $\text{cl}_\tau(\mathcal{E})$ (“cl” = “closure”, afslutning). $\mathcal{F} = \text{cl}_\tau(\mathcal{E})$

er karakteriseret ved de tre krav

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\subseteq \mathcal{F} \\ \mathcal{F} &\text{ er af type } \tau \\ \mathcal{E} &\subseteq \mathcal{G}, \mathcal{G} \text{ af type } \tau \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}.\end{aligned}$$

F.eks. er $\text{cl}_{(\mathcal{C}, \cup f)}(\mathcal{E})$ den groveste brolægning, finere end $\mathcal{E}$, som er lukket under komplementærmængdedannelse og endelig foreningsmængdedannelse.

Hvis α står for enten “ f ”, “ c ” eller “ a ”, skriver vi tit $\mathcal{E}_{\cup \alpha}$ i stedet for $\text{cl}_{\cup \alpha}(\mathcal{E})$ og $\mathcal{E}_{\cap \alpha}$ i stedet for $\text{cl}_{\cap \alpha}(\mathcal{E})$. Tillige er det anerkendt standard at skrive $\mathcal{E}_\sigma$, hhv. $\mathcal{E}_\delta$ i stedet for $\mathcal{E}_{\cup c}$, hhv. $\mathcal{E}_{\cap c}$. Så $\mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_{\cup c} = \text{cl}_{\cup c}(\mathcal{E})$. Mængderne i $\mathcal{E}_\sigma$ kaldes $\mathcal{E}_\sigma$ -mængder (“ $\mathcal{E}$ -sigma-mængder”); det er mængder der kan skrives som tællelige foreningsmængder af mængder i $\mathcal{E}$. Tilsvarende er $\mathcal{E}_\delta = \mathcal{E}_{\cap c} = \text{cl}_{\cap c}(\mathcal{E})$, og mængderne i $\mathcal{E}_\delta$ kaldes $\mathcal{E}_\delta$ -mængder (“ $\mathcal{E}$ -delta-mængder”) og er mængder, der kan skrives som tællelige fællesmængder af mængder i $\mathcal{E}$.

Brolægninger som $\mathcal{E}_{\delta\sigma}$ og $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ står for hhv. $(\mathcal{E}_\delta)_\sigma$ og $(\mathcal{E}_\sigma)_\delta$ og en mængde i $\mathcal{E}_{\delta\sigma}$, hhv. $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ hedder en $\mathcal{E}_{\delta\sigma}$ -mængde (“ $\mathcal{E}$ -delta-sigma-mængde”), hhv. en $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ -mængde (“ $\mathcal{E}$ -sigma-delta-mængde”).

Af de distributive love (2) og (3) ses, at såfremt α står for enten “ f ”, “ c ” eller “ a ”, gælder

$$\text{cl}_{\cup f, \cap \alpha}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cup f, \cap \alpha}, \quad (1.18)$$

$$\text{cl}_{\cap f, \cup \alpha}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cap f, \cup \alpha} \quad (1.19)$$

F.eks. har vi

$$\text{cl}_{\cup f, \cap f}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cup f, \cap f} = \mathcal{E}_{\cap f, \cup f}, \quad (1.20)$$

$$\text{cl}_{\cup f, \cap c}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cup f, \cap c} = \mathcal{E}_{\cup f, \delta}, \quad (1.21)$$

$$\text{cl}_{\cap f, \cup c}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cap f, \cup c} = \mathcal{E}_{\cap f, \sigma}, \quad (1.22)$$

$$\text{cl}_{\cap f, \cup a}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{\cap f, \cup a}. \quad (1.23)$$

1.6 Ordningsrelationer

Lad $(X, \leq)$ være en mængde med en relation “ $\leq$ ”. Vi taler om en *præordning*, hvis $\leq$ er *refleksiv* ($\forall x : x \leq x$) og *transitiv* ($x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$), om en *ordning* hvis $\leq$ tillige er *antisymmetrisk* ($x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$) og om en *total ordning*, hvis yderligere $\forall x \forall y : x \leq y \vee y \leq x$ gælder. Af og til tales om en *partiell ordning* i stedet for blot en ordning. Vi skriver $x < y$, hvis $x \leq y$ og $\neg(y \leq x)$.

Den *diffuse præordning* i X er givet ved at $x \leq y$ for alle $x, y \in X$. Den *sædvanlige ordning* i $\mathbb{R}$ betegnes $\leq$ ($x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$). Den *punktvise ordning* i $\mathbb{R}^T$ er givet ved $f \leq g \Leftrightarrow \forall t \in T : f(t) \leq g(t)$. Inklusion “ $\subseteq$ ” er en ordning i $\mathcal{P}(X)$. Er $(X, \leq)$ og $(Y, \leq)$ totale ordninger, defineres den *leksikografiske*

ordning i $X \times Y$ ved $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y')$. Er $(X, \leq)$ en præordning og $X_0 \subseteq X$, definerer restriktionen af $\leq$ til X_0 en præordning i X_0 , den *inducerede* præordning i X_0 .

Lad $(X, \leq)$ være en præordning. Så er $x \in X$ et *maksimalt element* i X såfremt $\forall y \in X : \neg(y > x)$. Og x er en *øvre grænse* eller *majorant* for $A \subseteq X$ såfremt $\forall a \in A : a \leq x$ og en *mindste øvre grænse* for A såfremt x er en øvre grænse for A og $x \leq x'$ for enhver anden øvre grænse x' for A . Såfremt $(X, \leq)$ er en ordning, er en mindste øvre grænse entydigt bestemt og vi kan så anvende velkendt notation som $\sup A$ eller $\sup\{x | x \in A\}$. Tilsvarende begreber indføres i forbindelse med notation som $\inf A$. Ordningen $(X, \leq)$ er *fuldstændig* såfremt enhver delmængde $A \subseteq X$ der har en øvre grænse har en mindste øvre grænse og enhver delmængde, der har en nedre grænse, har en største nedre grænse.

Som bekendt er $\mathbb{R}$ fuldstændig i den sædvanlige ordning, mens $\mathbb{Q}$ eller $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ikke er det.

Zorn's Lemma er følgende resultat: Såfremt den præordnede mængde $(X, \leq)$ er *induktivt ordnet* dvs. enhver delmængde $X_0 \subseteq X$, der er totalt ordnet har en øvre grænse i X , så har X et maksimalt element. Resultatet hænger sammen med udvalgsaksiomet.

Hvis relationen $\leq$ på X er antisymmetrisk og opfylder betingelsen, at enhver ikke-tom delmængde A af X indeholder et første element ($A \subseteq X \wedge A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in A \forall b \in A : a \leq b$), kaldes $\leq$ en *velordning*. En velordning er en total ordning. Eksempelvis er $(\mathbb{N}, \leq)$ en velordning.

Er $(X, \leq)$ en velordnet mængde og x et element i X , defineres *venstreafsnittet* $V(x)$ bestemt ved x som mængden af $y \in X$ med $y < x$.

Teorien for velordnede mængder udnyttes til at opbygge *ordinaltallene*. Teorien ligger også bag principperne for *transfinit induktion* og *rekursion*. Vi skal i næste § nøjes med at se på et specielt ordinaltal. For en mere generel diskussion, se f.eks. (Hrbacek og Jech, 1978) eller (Topsøe, 1998).

1.7 Især om ordinaltallet ω_1 , induktion og rekursion

Der gælder følgende resultat (bygger på udvalgsaksiomet): *Der findes en overtællelig velordnet mængde $(X, \leq)$, så ethvert venstreafsnit er tælleligt.*

Man kan vise, at denne mængde er entydigt bestemt, i den forstand, at enhver anden mængde med samme egenskaber er ordensteoretisk isomorf med mængden. Mængden X er pr. vores definition simpelthen lig med *ordinaltallet* ω_1 . En strømlinede behandling af mængdelæren vil vise, hvordan ω_1 kan defineres helt præcist, så man ved, præcis hvilken udgave af X – der jo kun er bestemt på nær isomorfi – man får fat på.

Elementerne i X (nogle af dem) har bestemte navne. Da $X \neq \emptyset$, har X et første element. Det kaldes 0 (i den strømlinede mængdelære, er det elementet 0). Dette

element er karakteriseret ved at $V(0) = \emptyset$. Da $X \setminus \{0\} \neq \emptyset$, har denne mængde et første element. Det kaldes 1 (det *er* 1). Således fortsættes og man finder elementer med navnene $0, 1, 2, \dots$, ja det *er* tallene $0, 1, 2, \dots$. Bemærk, at for alle n er

$$V(n) = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

så $V(n)$ indeholder præcis n elementer; $n = 0, 1, \dots$.

Da $X \setminus \{0, 1, \dots\} = X \setminus \mathbb{N}_0$ er ikke-tom (thi X er overtællelig), findes et første element i $X \setminus \mathbb{N}_0$. Det hedder ω . Elementerne i X er alle *ordinaltal*. Vi siger, at et ordinaltal $x \in X$ er endeligt, tælleligt eller evt. har en anden egenskab, såfremt venstreafsnittet har den pågældende egenskab. Vi kan så karakterisere ω som det første uendelige ordinaltal ($V(\omega) = \mathbb{N}_0$ er jo uendelig og for $n < \omega$ er $V(n) = \{0, \dots, n-1\}$ endelig).

Da X er stor (overtællelig), kan vi fortsætte med at give elementerne i X navne: $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega 2, \omega 2 + 1, \dots, \omega 3, \omega 3 + 1, \dots, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \varepsilon_1, \dots$. Se evt. (Topsøe, 1998). Præcis, hvordan det sker er ikke væsentligt for os. På denne måde får vi et billede af X som en lang række, ordinalrækken (op til ω_1). Hvis vi tilføjer ω_1 som “rosinen i pølseenden”, ser billedet nogenlunde sådan ud:

Figur 1

Bemærk, at alle konstruerede ordinaltal er tællelige. Først når vi når helt ud til ω_1 – som vi, trods det, at $\omega_1 \notin X$, også vil opfatte som et ordinaltal – fås et overtælleligt ordinaltal idet $V(\omega_1) = X$ som er overtællelig. Vi kunne fortsætte ud over ω_1 og indføre nye ordinaltal. Men ω_1 er allerede “godt langt ude” og vi får ikke brug for større ordinaltal i elementær målteori.

Vi bruger tit interval-notation, f.eks. $[0, \alpha[$ for $V(\alpha) = \{x | x < \alpha\}$, hvor α er et ordinaltal. Vi har:

- (i) $[0, \omega_1[$ er overtællelig,
- (ii) $\forall \alpha < \omega_1 : [0, \alpha[$ er tællelig,
- (iii) $\forall A \subseteq [0, \omega_1[: A \text{ tællelig} \Rightarrow \exists \beta < \omega_1 \forall a \in A : a \leq \beta$,
- (iv) $\forall A \subseteq [0, \omega_1[: A \text{ tællelig} \Rightarrow \sup A < \omega_1$.

Egenskaberne (i) og (ii) er gentagelser, men med brug af intervalnotationen. Den centrale egenskab (iii) vises som følger: Lad $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Da hvert a_n er $< \omega_1$, er mængderne $[0, a_n[$; $n \geq 1$ alle tællelige. Så er også $A^* = \bigcup_1^\infty [0, a_n[$ tællelig. Da $X = [0, \omega_1[$ er overtællelig, er $X \setminus A^*$ ikke tom. Vælg $\beta \in X \setminus A^*$. Så er $\beta < \omega_1$ (thi

$\beta \in X$) og for alle n , må $a_n \leq \beta$ (var $\beta < a_n$, ville $\beta \in A^*$!). Herved er (iii) vist. Egenskaben (iv) er blot en lille skærpelse af (iii), der fremstår ved i beviset for (iii) at se på det første element β i $X \setminus A^*$.

Ordinaltallene deles i tre kategorier: 0, *efterfølgere* og *grænseordinaltal*. Der er altså kun ét ordinaltal af første kategori, nemlig 0. I anden kategori har vi alle efterfølgere, dvs. alle ordinaltal α , der kan skrives som $\beta + 1$ (dvs. der findes β , så α er det første ordinaltal, der er større end β). I sidste kategori har vi grænseordinaltallene, der simpelthen er ordinaltal, der ikke tilhører en af de to første kategorier (så γ er et grænseordinaltal betyder, at $\gamma > 0$ og $\forall \alpha < \gamma \exists \beta : \alpha < \beta < \gamma$).

Ethvert ordinaltal α kan på entydig måde skrives på formen $\gamma + n$, hvor γ enten er 0 eller et grænseordinaltal og $n \in \mathbb{N}_0$. Hvis n er lige, er α et *lige ordinaltal*, mens α er et *ulige ordinaltal*, hvis n er ulige.

Induktion og *rekursion* kan gennemføres over et vilkårligt ordinaltal. For ordinaltallet ω fås *sædvanlig induktion* og *rekursion*. Induktion udnyttes til at bevise egenskaber, rekursion til at konstruere objekter. Det er let at præcisere, hvad induktion går ud på:

Lad α være et ordinaltal (tilfældene $\alpha = \omega$ og $\alpha = \omega_1$ er særligt vigtige). Hvis $A \subseteq [0, \alpha[$ og implikationen $[0, \beta[\subseteq A \Rightarrow \beta \in A$ gælder for alle $\beta < \alpha$ (obs.: også for $\beta = 0$), så er $A = [0, \alpha[$. Hvis vi i stedet for ovenstående implikation om A forlanger, at $0 \in A$, at $\beta \in A \Rightarrow \beta + 1 \in A$ og at det for ethvert grænseordinaltal $\gamma < \alpha$ gælder, at $[0, \gamma[\subseteq A \Rightarrow \gamma \in A$, så kan vi ligeledes slutte, at $A = [0, \alpha[$. Disse resultater, her anført i to varianter, er *induktionsprincippet* for induktion over α . Er $\alpha = \omega$ fås velkendte principper for induktion over $\mathbb{N}$ (eller $\mathbb{N}_0$).

Lad igen α være et ordinaltal. *Princippet for rekursion over α* vil vi kun formulere løst. Ønsket er, i en given situation, at knytte et entydigt bestemt objekt til ethvert ordinaltal $\beta < \alpha$. Rekursionsprincippet siger, at hvis vi på ethvert trin ved, hvordan vi kommer videre, vil vort forehavende lykkes. Mere præcist skal det gælde for ethvert $\beta < \alpha$, at såfremt vi allerede har konstrueret alle de objekter, der hører til ordinaltal i $[0, \beta[$, så skal vi kunne angive objektet knyttet til β . Ofte vil dette krav være opfyldt ved at vi 1) angiver, hvilket objekt der skal knyttes til ordinaltallet 0, 2) for ethvert $\beta < \alpha$ angiver, hvordan objektet knyttet til $\beta + 1$ kan konstrueres ud fra objektet knyttet til β (forudsat $\beta + 1 < \alpha$) og endelig 3) for ethvert grænseordinaltal $\gamma < \alpha$ angiver, hvorledes objektet knyttet til γ kan konstrueres ud fra objekterne knyttet til ordinaltal mindre end γ .

1.8 Uendelige mængder, kardinaltal

To mængder X og Y har samme *mægtighed*, eller er *ækvipotente*, og vi skriver $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$, såfremt der findes en bijektion $f : X \rightarrow Y$. Vi skriver $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$, hvis der findes en indlejring $f : X \hookrightarrow Y$ og vi skriver $\text{card}(X) < \text{card}(Y)$ hvis $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ og $\neg(\text{card}(X) = \text{card}(Y))$.

Udover banale egenskaber nævnes *Cantors Sætning*: $\text{card}(X) < \text{card } \mathcal{P}(X)$ og

Cantor-Bernsteins ækvivalenssætning: $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y) \wedge \text{card}(Y) \leq \text{card}(X) \Rightarrow \text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

Er $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{N})$, skrives $\text{card}(X) = \aleph_0$ ("aleph-nul"), er $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{R})$, skrives $\text{card}(X) = 2^{\aleph_0}$, og hvis $\text{card}(X) = \text{card } \mathcal{P}(\mathbb{R})$, skrives $\text{card}(X) = 2^{2^{\aleph_0}}$. Her er $2^{\aleph_0}$ *kontinuets mægtighed*. *Kardinaltallene* $\aleph_0, 2^{\aleph_0}$ og $2^{2^{\aleph_0}}$ er de tre vigtigste kardinaltal for uendelige mængder. Måske burde også $\aleph_1$, som er givet ved $\text{card}([0, \omega_1]) = \aleph_1$ henregnes til denne kategori. *Kontinuumshypotesen* siger, at $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

For endelige mængder bruges sædvanlig notation, f.eks. $\text{card}(\{0, 1, \dots, n-1\}) = n$.

Ovenfor er $\aleph_0$ osv. rene skrivemåder. I den strømlinede mængdelære er kardinaltallene visse ordinaltal (nemlig de α for hvilke $\text{card}([0, \beta]) < \text{card}([0, \alpha])$ for ethvert $\beta < \alpha$) og man indfører særlige navne til de uendelige kardinaltal. Uden at vi skal diskutere det i detaljer nævnes, at man ved rekursion (i en meget generel udgave) kan indføre navne ($\aleph_\alpha$), hvor α kan være et vilkårligt ordinaltal, således, at enhver uendelig mængde X får tilknyttet et entydigt bestemt α , så $\text{card}(X) = \aleph_\alpha$. Fremgangsmåden er følgende: $\aleph_0 = \omega$, for α er $\aleph_{\alpha+1}$ = første ordinaltal β , så $\text{card}([0, \beta]) > \text{card}([0, \aleph_\alpha])$ og endelig er $\aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$, hvis γ er et grænseordinaltal.

For kardinaltal κ og λ indføres *sum* $\kappa + \lambda$, *produkt* $\kappa \cdot \lambda$ og *eksponentiering* κ^λ på følgende måde: Vælg disjunkte mængder X og Y , så $\text{card}(X) = \kappa$, $\text{card}(Y) = \lambda$. Så er $\kappa + \lambda = \text{card}(X \cup Y)$, $\kappa \cdot \lambda = \text{card}(X \cdot Y)$ og $\kappa^\lambda = \text{card}(X^Y)$. Udover banale regneregler nævnes, at for et vilkårligt uendeligt kardinaltal κ , er $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Det er nok den vigtigste regneregler for uendelige kardinaltal. Ud fra den kan man let vise følgende regler, der forudsætter, at κ er uendelig og, i (25), at $\lambda \geq 2$:

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda), \quad (1.24)$$

$$\lambda \leq \kappa \Rightarrow 2^\kappa = \lambda^\kappa. \quad (1.25)$$

Beviset for (25) føres ved at udnytte den banale (?) regneregler $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$ (udnyt, at der er en naturlig bijektion mellem $(X^Y)^Z$ og $X^{Y \times Z}$) sammen med overvejselsen:

$$2^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (2^\lambda)^\kappa = 2^{\lambda \cdot \kappa} = 2^\kappa.$$

Følgende sprogbrug er valgt og anvendes (forhåbentlig!) konsekvent: "numerabel" står for "af kardinalitet $\aleph_0$ " og "tællelig" står for "af kardinalitet $\leq \aleph_0$ ".

1.9 Følger og net

Ved en *mængde med retning* forstås en præordnet mængde $(I, \leq)$ så enhver endelig delmængde af I har en øvre grænse. F.eks. er $(\mathbb{N}, \leq)$ en mængde med retning.

Lad X være en mængde. Ved et *net* i X eller en *generaliseret følge* i X forstås en afbildning af en mængde med retning ind i X . Vi foretrækker en notation som

$(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ for et net i X . Lad $X_0 \subseteq X$. Vi skriver $x_\alpha \in X_0$ f.v.t. (*fra et vist trin*) såfremt $\exists \alpha_0 \in I \forall \alpha \geq \alpha_0 : x_\alpha \in X_0$. Vi skriver $x_\alpha \in X_0$ u.o. (*uendelig ofte*) såfremt $\forall \alpha_0 \in I \exists \alpha \geq \alpha_0 : x_\alpha \in X_0$. Vi har

$$\neg(x_\alpha \in X_0 \text{ f.v.t.}) \Leftrightarrow x_\alpha \in \mathbb{C}(X_0) \text{ u.o.}, \quad (1.26)$$

$$\neg(x_\alpha \in X_0 \text{ u.o.}) \Leftrightarrow x_\alpha \in \mathbb{C}(X_0) \text{ f.v.t.} \quad (1.27)$$

Er $(I, \leq)$ og $(J, \leq)$ to mængder med retning og er $\beta \curvearrowright \alpha_\beta$ en afbildning af J ind i I således, at $\forall \alpha_0 \in I : \alpha_\beta \geq \alpha_0$ f.v.t. (altså: $\forall \alpha_0 \in I \exists \beta_0 \in J \forall \beta \geq \beta_0 : \alpha_\beta \geq \alpha_0$), siges $(x_{\alpha_\beta})_{\beta \in J}$ at være et *delnet* af $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Lad $(x_n)_{n \geq 1}$ være en sædvanlig følge i X . For enhver mængde $E \subseteq X$ kan vi udtynde følgen $(x_n)_{n \geq 1}$ til en delfølge $(x_{n_m})_{m \geq 1}$ således, at enten vil delfølgen "bekende sig" til mængden E eller til komplementet $\mathbb{C}E$ i den forstand, at enten vil $x_{n_m} \in E$ f.v.t. eller også vil $x_{n_m} \in \mathbb{C}E$ f.v.t. Ved et diagonalræsonnement indses så, at følgende resultat gælder: Lad X være en mængde, lad (x_n) være en følge i X og lad $\mathcal{E}$ være en numerabel brolægning på X . Så findes en delfølge (x_{n_m}) således, at det for enhver mængde $E \in \mathcal{E}$ enten gælder, at $x_{n_m} \in E$ f.v.t. eller at $x_{n_m} \in \mathbb{C}E$ f.v.t.

Når man i stedet for følger ser på net, kan ovenstående generaliseres kraftigt, idet man som $\mathcal{E}$ kan tillade hele potensmængden $\mathcal{P}(X)$. Vi siger, at et net i X er et *universalnet* i X såfremt det for enhver delmængde E af X enten gælder, at nettet f.v.t. ligger i E eller, at nettet f.v.t. ligger i komplementærmængden $\mathbb{C}E$. Der gælder så, at *ethvert net har et universelt delnet* ($\forall (x_\alpha)$ net i $X \exists$ delnet $(x_{\alpha_\beta}) : (x_{\alpha_\beta})$ er et universalnet). Dette resultat kræver udvalgsaksiomet.

1.10 Begreber fra den generelle topologi

Et *topologisk rum* er en mængde X med en $(\emptyset, X, \cup, \cap, f)$ -brolægning. Brolægningen hedder *topologien* på X og mængderne i brolægningen hedder de *åbne mængder*. Ofte taler man om "det topologiske rum X ". Brolægningen af åbne mængder betegnes $\mathcal{G}(X)$ (" G " for "Gebiet").

Brolægningen $\mathcal{F}(X) = \text{co}\mathcal{G}(X)$ er brolægningen af *lukkede* eller *afsluttede* mængder (" F " for "fermé").

Er X et topologisk rum og $A \subseteq X$, betegner vi med $\text{int}(A) = \mathring{A}$ den største åbne mængde indeholdt i A og med $\bar{A}$ den mindste lukkede mængde indeholdende A ; $\text{int}(A)$ er det *indre* af A og $\bar{A}$ er *afslutningen* af A . Hvis $\bar{A} = X$, er A *tæt* i X . Findes en tællelig tæt mængde, er X *separabelt*.

Er $\mathcal{G}(X) = \text{cl}_{(\emptyset, X, \cup, \cap, f)}(\mathcal{G}_0)$, er $\mathcal{G}_0$ en *subbasis* for topologien. Af (23) ses, at så består $\mathcal{G}(X)$ af $\emptyset$ og X samt alle foreningsmængder af endelige fællesmængder af mængder i $\mathcal{G}_0$. Brolægningen $\mathcal{G}_0$ er en *basis* for topologien $\mathcal{G}(X)$ såfremt $\mathcal{G}(X)$ består af $\emptyset$ samt alle foreningsmængder af mængder i $\mathcal{G}_0$. Er $\mathcal{E}$ en brolægning på X , er $\mathcal{E}$ en basis for en topologi, hvis og kun hvis $\bigcup \{E | E \in \mathcal{E}\} = X$ og vi af $x \in E_1 \cap E_2$ med $E_1 \in \mathcal{E}$ og $E_2 \in \mathcal{E}$ kan slutte, at $x \in E \subseteq E_1 \cap E_2$ for en mængde $E \in \mathcal{E}$.

Hvis der findes en tællelig basis for en topologi, siger vi, at topologien opfylder 2'det *tællelighedsaksiom*.

Opfylder X 2'det tællelighedsaksiom, er X separabelt og et *hereditært Lindelöfrum*, dvs. for alle $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}(X)$ findes $\mathcal{G}_0$ tællelig, så $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ og $\bigcup \mathcal{G}_0 = \bigcup \mathcal{G}$.

Ved en *omegn* til et punkt x i det topologiske rum forstås en mængde N , for hvilken der findes G åben, så $x \in G \subseteq N$. Ofte er det underforstået, at en mængde, der betegnes $N(x)$ er en omegn af x (N for "neighbourhood", omegn). Et *Hausdorff-rum* er et topologisk rum så $\forall x \neq x' \exists N(x) \exists N(x') : N(x) \cap N(x') = \emptyset$. Generelt gælder, at

$$\dot{A} = \{x | \exists N(x) : N(x) \subseteq A\}, \quad (1.28)$$

$$\bar{A} = \{x | \forall N(x) : N(x) \cap A \neq \emptyset\}. \quad (1.29)$$

Lad $(x_\alpha) = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ være et net i det topologiske rum X og lad $x \in X$. Vi siger, at (x_α) er *konvergent med grænsepunkt* x såfremt $\forall N(x) : x_\alpha \in N(x)$ f.v.t. og i så fald skrives $\lim_I x_\alpha = x$, $\lim x_\alpha = x$ eller $x_\alpha \rightarrow x$. Er X et Hausdorffrum, er grænsepunktet entydigt bestemt ($x_\alpha \rightarrow x \wedge x_\alpha \rightarrow x' \Rightarrow x = x'$).

En mængde $F \subseteq X$ er lukket, hvis og kun hvis grænsepunktet for ethvert konvergent net på F tilhører F ($(x_\alpha) \subseteq F \wedge x_\alpha \rightarrow x \Rightarrow x \in F$). Mere generelt har vi, for en vilkårlig delmængde $A \subseteq X$:

$$\bar{A} = \{x | \exists (x_\alpha) \subseteq A : x_\alpha \rightarrow x\}, \quad (1.30)$$

og den "duale" egenskab

$$\dot{A} = \{x | \forall (x_\alpha) : x_\alpha \rightarrow x \Rightarrow x_\alpha \in A \text{ f.v.t.}\}. \quad (1.31)$$

Er $X = (X, \mathcal{G}(X))$ og $Y = (Y, \mathcal{G}(Y))$ topologiske rum, siges $f : X \rightarrow Y$ at være *kontinuert* såfremt $\forall G \in \mathcal{G}(Y) : f^{-1}(G) \in \mathcal{G}(X)$. Dette er ækvivalent med at konvergens bevares for net, dvs. af (x_α) net på X med $x_\alpha \rightarrow x$ følger $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$. Vi siger, at $f : X \rightarrow Y$ er *kontinuert i* $x_0 \in X$ såfremt $\forall N(f(x_0)) \exists N(x_0) : f(N(x_0)) \subseteq N(f(x_0))$. Dette er ækvivalent med at vi af $x_\alpha \rightarrow x_0$ kan slutte, at $f(x_\alpha) \rightarrow f(x_0)$.

Som bekendt er (X, d) et *metrisk rum* såfremt $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ opfylder kravene $\forall x_1, x_2 : d(x_1, x_2) \geq 0$; $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$; $\forall x_1, x_2 : d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$; $\forall x_1, x_2, x_3 : d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$. Den *åbne kugle* med centrum $x \in X$ og radius $r > 0$ er mængden $B(x, r) = \{y | d(x, y) < r\}$. Brolægningen af endelige fællesmængder af åbne kugler er basis for en topologi, den *metriske topologi* eller topologien *induceret* af metrikken d . I denne gælder, at $x_\alpha \rightarrow x$ hvis og kun hvis $d(x_\alpha, x) \rightarrow 0$. Er (Y, ρ) også et metrisk rum, er en afbildning $f : X \rightarrow Y$ kontinuert (m.h.t. de metriske topologier) hvis og kun hvis $\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Et topologisk rum er *metriserbart*, hvis der findes en metrik på rummet som inducerer topologien.

Talrummene $\mathbb{R}^n$ har en naturlig metrik, den *Euklidiske metrik*, givet ved $d(x, y) = (\sum_1^n (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ for $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Når vi taler om topologiske egenskaber for $\mathbb{R}^n$, tænkes altid på topologien induceret af denne metrik.

En afbildning $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, hvor X er et topologisk rum er *nedad halvkontinuert* (l.s.c., “lower semi continuous”) såfremt mængderne $\{f > a\}$ er åbne for alle $a \in \mathbb{R}$. Er f l.s.c. og (x_n) en konvergent følge på X , lad os sige $x_n \rightarrow x$, vil $f(x) \leq \liminf f(x_n)$. En tilsvarende egenskab gælder for konvergente net og egenskaben udvidet til net karakteriserer l.s.c. egenskaben. Afbildningen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ er *opad halvkontinuert* (u.s.c., “upper semi continuous”) såfremt mængderne $\{f < a\}$ er åbne. Hvis f er u.s.c. og $x_n \rightarrow x$, vil $\limsup f(x_n) \leq f(x)$. Vi ser, at f er kontinuert hvis og kun hvis f er såvel l.s.c. som u.s.c.

En delmængde K af et topologisk rum X er *kompakt* såfremt ethvert universalnet på K konvergerer mod et punkt i K . Dette er ensbetydende med at ethvert net på K har et delnet, der konvergerer mod et punkt i K og egenskaben kan også karakteriseres ved at enhver overdækning af K med åbne mængder har en endelig deloverdækning (*Heine-Borel's overdækningsegenskab*). Hvis $X \in \mathcal{K}(X)$, er X et *kompakt topologisk rum*. Er K kompakt og F lukket, er $K \cap F$ kompakt. Er X metriserbar, er $K \subseteq X$ kompakt, hvis og kun hvis K er lukket og *følgekompakt*, dvs. enhver følge på K har en konvergent delfølge.

Brolægningen af kompakte delmængder af X benævnes $\mathcal{K}(X)$. Er X et Hausdorff rum, er $\mathcal{K}(X)$ en $(\emptyset, \cup, \cap)$ -lukket delbrolægning af $\mathcal{F}(X)$ og endvidere er $\mathcal{K}(X)$ en *kompakt brolægning*, dvs. såfremt $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}(X)$ har den *endelige fællesmængdeegenskab* ($\mathcal{K}_{00} \subseteq \mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_{00}$ endelig $\Rightarrow \bigcap \mathcal{K}_{00} \neq \emptyset$), så er $\bigcap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$ (denne egenskab er ækvivalent med at man af $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}(X)$ og $\mathcal{K}_0 \downarrow \emptyset$, kan slutte $\emptyset \in \mathcal{K}_0$).

Er K_1 og K_2 disjunkte mængder i et Hausdorff rum, findes disjunkte åbne mængder G_1 og G_2 så $G_1 \supseteq K_1$, $G_2 \supseteq K_2$.

I $\mathbb{R}^n$ er $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ brolægningen af lukkede og begrænsede mængder. Er (X, d) et metrisk rum og er metrikken *fuldstændig*, dvs. er enhver *Cauchy-følge* konvergent ($\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0 \Rightarrow \exists x : x_n \rightarrow x$), så er $K \subseteq X$ kompakt, hvis og kun hvis K er lukket og *totalt begrænset* (dvs. $\forall \varepsilon > 0 \exists X_0$ endelig: $K \subseteq \bigcup \{B(x, \varepsilon) | x \in X_0\}$).

Man kan danne “nye” topologiske rum ud fra “gamle”. Vi nævner kun to konstruktioner. Er X et topologisk rum og $X_0 \subseteq X$, er $\text{tr}_{X_0}(\mathcal{G}(X))$ en topologi på X_0 , *sportopologien* eller den *relative topologi* på X_0 . I denne er (pr. definition) $\mathcal{G}(X_0) = \text{tr}_{X_0}(\mathcal{G}(X))$ og $\mathcal{F}(X_0) = \text{tr}_{X_0}(\mathcal{F}(X))$. Derimod er kompakthed et “absolut” begreb i den forstand, at for en delmængde $A \subseteq X_0$ gælder: $A \in \mathcal{K}(X_0) \Leftrightarrow A \in \mathcal{K}(X)$.

Er $(X_i, \mathcal{G}(X_i))_{i \in I}$ en familie af topologiske rum, defineres *produkttopologien* $(X, \mathcal{G}(X))$ ved at $X = \prod_{i \in I} X_i$ og ved at $X_{i \in I} \mathcal{G}(X_i)$ er en basis for $\mathcal{G}(X)$. Topologien kan også beskrives som *topologien for koordinatvis konvergens* idet konvergens for et net på X kommer ud på konvergens for ethvert af de net, der kan dannes på koordinatrummene X_i . For produkttopologien gælder *Tychonof's Sætning*, at X er kompakt hvis og kun hvis X_i er kompakt for alle $i \in I$. Er alle rummene X_i Hausdorffrum, da også $X = \prod X_i$.

1.11 Uendelige summer

Lad I være en mængde og $i \mapsto a_i$ en afbildning af I ind i $\mathbb{R}$ (eller i $\bar{\mathbb{R}}$, der dog kræver visse modifikationer nedenfor). Lad D være mængden af endelige ikke-tomme delmængder af I . For $\alpha \in D$ defineres *afsnitssummen* s_α ved $s_\alpha = \sum\{a_i \mid i \in \alpha\}$. Idet vi forsyner D med ordningen “inklusion”, altså $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$, bliver D en mængde med retning og $(s_\alpha)_{\alpha \in D}$ dermed et net på $\bar{\mathbb{R}}$. Hvis dette net er konvergent med en grænseværdi s i $\mathbb{R}$, kaldes symbolet $\sum a_i = \sum_{i \in I} a_i$ *konvergent*, s kaldes *summen* (af a_i 'erne) og vi skriver $\sum_{i \in I} a_i = s$ og tillægger $\sum_{i \in I} a_i$ værdien s .

Hvis $a_i \geq 0$; $i \in I$, er $\sum a_i$ konvergent, hvis og kun hvis $\sup\{s_\alpha \mid \alpha \in D\} < \infty$ og værdien af summen er netop dette supremum. I dette tilfælde ($a_i \geq 0$; $i \in I$) skriver vi altid $\sum a_i = \sup\{s_\alpha \mid \alpha \in D\}$ også hvis supremum er ∞ .

Generelt er $\sum a_i$ konvergent, hvis og kun hvis $\sum a_i^+$ og $\sum a_i^-$ begge er konvergente. Hvis enten $\sum a_i^+ = \infty \wedge \sum a_i^- < \infty$ eller $\sum a_i^+ < \infty \wedge \sum a_i^- = \infty$, tillægger vi også $\sum a_i$ en værdi, nemlig $+\infty$ i første, og $-\infty$ i andet tilfælde. I alle tilfælde, hvor $\sum a_i$ tillægges en værdi, er $\sum a_i = \sum a_i^+ - \sum a_i^-$.

Er $\sum a_i$ konvergent, er $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$ tællelig, så i en vis forstand reducerer generelle uendelige summer til sædvanlige summer, hvor $I = \mathbb{N}$.

Advarsel: Det indførte begreb for konvergens af uendelige summer $\sum_{i \in I} a_i$ som indført her svarer til *absolut* konvergens for sædvanlige summer $\sum_{n \geq 1} a_n$ og ikke til sædvanlig konvergens af $\sum_{n \geq 1} a_n$ (her kan konvergens jo være betinget). I målteorien er det indførte konvergensbegreb, altså svarende til absolut konvergens, det vigtigste – og i øvrigt giver betinget konvergens ingen mening for uendelige summer over en abstrakt mængde I . For $I = \mathbb{N}$ udnyttes jo ordningen for at indføre betinget konvergens. Det sædvanlige konvergensbegreb for summer over $\mathbb{N}$ er fastlåst standard, hvorfor vi altid, når $I = \mathbb{N}$, med $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ og lignende sigter til det sædvanlige sum-begreb for uendelige rækker og eksplicit må nævne, hvis vi forlanger absolut konvergens.

At vores sumbegreb svarer til absolut konvergens ses også af følgende to vigtige resultater: Er $i \mapsto \varphi(i)$ en bijektion af I på I , er $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\varphi(i)}$. Er $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ en klassedeling af I , er $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i$. Begge resultater skal forstås i den stærkest tænkelige form (venstresiderne er veldefinerede, hvis og kun hvis højresiderne er det, og er dette tilfældet gælder, at de to sider er ens). Resultaterne svarer til to klassiske resultater for absolut konvergente rækker: Dels, at leddenes orden er vilkårlig, dels at vi kan sætte parenteser efter behag i sådanne rækker.

Appendix II. Målteoriens abstrakte brolægninger, en oversigt

I nedenstående skema definerer de to første søjler forskellige typer af brolægninger $\mathcal{A}$; først anføres betegnelsen for brolægninger af den betragtede type, dernæst definitionen, der angiver hvilke operationer, denne type brolægninger er lukkede overfor (i to tilfælde anføres særlige ekstra betingelser, der indgår i definitionen). Tredie søjle angiver eventuel notation for en brolægning af den betragtede type frembragt af $\mathcal{E}$. Endelig henvises i sidste søjle til relevante steder i noterne, hvor brolægningerne optræder.

Præcisering af definitionerne på en semiring og en semialgebra: En *semiring* hhv. *semialgebra* er en $(\emptyset, \cap f)$ -lukket brolægning, så enhver differensmængde af to mængder fra brolægningen, hhv. enhver komplementærmængde til en mængde i brolægningen, kan skrives som en endelig disjunkt foreningsmængde af mængder fra brolægningen.

BETEGNELSE	DEFINITION	NOTATION	HENVISNINGER
<i>gruppe</i>	$\cap f$		
<i>ring</i>	$\setminus, \cup f$		
<i>gitter</i>	$\cup f, \cap f$		
<i>semiring</i>	$\cap f$; differenser $\in \text{cl}_{\Sigma f}(\mathcal{A})$		
<i>semialgebra</i>	$\emptyset, \cap f, \text{co}(\mathcal{A}) \subseteq \text{cl}_{\Sigma f}(\mathcal{A})$		
<i>algebra</i>	$\mathbb{C}, \cup f$	$\alpha(\mathcal{E})$	
<i>monoton klasse</i>	$\cup c, \cap c$		
<i>Dynkin system</i>	$\mathbb{C}, \Sigma c$		
<i>normal klasse</i>	$\Sigma c, \cap c$		
<i>σ-gitter, Borelsk brol.</i>	$\cup c, \cap c$	$\text{Bor}(\mathcal{E})$	
<i>σ-ring</i>	$\setminus, \cup c$		
<i>σ-algebra, Borelstruktur</i>	$\mathbb{C}, \cup c$	$\sigma(\mathcal{E})$	

Appendix III. Uligheder i L_p -rum

3.1 Funktionsrummene $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu), 1 \leq p < \infty$.

Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum med $X \neq \emptyset$, medens p er et reelt tal, $1 \leq p < \infty$.

En reel (eller kompleks) funktion f defineret på X siges at være *p-dobbelt integrabel* med hensyn til μ , hvis f er $\mathbb{E}$ -målelig og

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

Mængden af p -dobbelt integrable funktioner $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (eller $f : X \rightarrow \mathbb{C}$) betegnes $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mu) = \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Bemærk, at $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(X, \mathbb{E}, \mu)$ netop er mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ af μ -integrable funktioner på X . – I stedet for 2-dobbelt integrabel siges også *kvadratisk integrabel*.

Appendix IV. Transformationssætningen