Stilopgave 1. Ved konstruktion af mål anvendes især tre ideer: Stramhed, approksimation og så Carathéodory's splitte-idé. Giv centrale definitioner vedrørende hver af disse kategorier og nævn mindst ét resultat fra hver kategori. Bevis desuden mindst et af de citerede resultater. Tillader tiden det, er man velkommen til i større detaljer at gennemgå en af de centrale sætninger om konstruktion af mål. OBS: Denne opgave var for løst formuleret, blev vi enige om. Jeg prøver nedenfor at skyde mig ind på et fornuftigt niveau.

Stilopgave 2. Lad λ betegne det fuldstændige Lebesguemål på $\mathbb{R}$. I denne opgave går vi ud fra som kendt, at λ er translationsinvariant (er A Lebesguemålelig, da også enhver mængde af formen $x + A$, hvor $x \in \mathbb{R}$, og disse mængder har alle samme Lebesguemål).

Bevis, at der findes en delmængde af $\mathbb{R}$, der *ikke* er Lebesguemålelig.

Vis, at der findes en kompakt overtællelig delmængde af $\mathbb{R}$ med Lebesguemål 0.

Stilopgave 3. (i) Definér, hvad man forstår ved at $(x, \mathcal{B})$ er et Borelrum.

(ii) Lad $\mathcal{E}$ være en brolægning på mængden X. Vis, at der findes en mindste Borelstruktur på X, der indeholder $\mathcal{E}$.

(iii) Lad nu $(X_1, \mathcal{B}_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2)$ være Borelrum og lad $\mathcal{E}_1$, henholdsvis $\mathcal{E}_2$ være frembringersystemer for henholdsvis $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$: $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}_1$, $\sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_2$. Antag, at $X_1 \in \mathcal{E}_1$ og at $X_2 \in \mathcal{E}_2$.

Definér *produkt Borelstrukturen* $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ og vis, at $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ er et frembringersystem for $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

(iv) Bevis sætningen om at produkt-målelige mængder har målelige sektioner (formulér først resultatet præcist).

Stilopgave 4. Formulér, hvad det vil sige, at en afbildning er målelig og bevis centrale resultater om målelige afbildninger. Det forventes, at følgende resultater – skitsemæssigt beskrevet – medtages i besvarelsen: Målelighed af restriktion og af sammensætning, kriterium for målelighed via frembringersystem for den underliggende Borelstruktur, målelighed af kontinuerte afbildninger, målelighed af diagonalafbildning (til opfriskning af hukommelsen: Til $f : X \to Y$ og $X \to Z$ hører diagonalafbildningen $x \curvearrowright (f(x), g(x)))$ og endelig målelighed af sum. Flere resultater kan medtages, hvis tiden tillader det.

Stilopgave 5. Vis hovedsætningen om eksistens og entydighed af integralet for ikke-negative funktioner. *Bemærkning:* Det indledende resultat om integralet af simple funktioner kræves formuleret, men beviset medtages kun såframt tiden tillader det.

Stilopgave 6. Sætning 5.2.1 i noterne lyder: ⟨ikke gengivet her⟩.

Bevis disse egenskaber for integralet, idet man kan støtte sig til forudgående resultater, specielt, at integralet allerede vides at have egenskaberne (vi) og (ix) og at formlen

$$\int f d\mu = \sup\{\int g d\mu \mid g \leq f, g \in \mathcal{S}^+(X, \mathcal{B})\}$$

gælder for alle $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{B})$.

Stilopgave 7. Sætning 5.3.1 i noterne lyder: ⟨ ikke gengivet her⟩.

Bevis disse resultater på basis af den forudgående teori for integralet af ikke-negative funktioner. Desuden må man naturligvis basere beviset på den valgte definition af integralet for vilkårlige reelle funktioner. For at lette besvarelsen anføres den relevante definition (nr. 5.3.1) her: ⟨ikke gengivet her⟩. *Bemærkning.* Man er velkommen til helt at ignorere problemer med $\pm\infty$. Der lægges ved bedømmelsen vægt på at det centrale i bevisgangen fremstår klart.